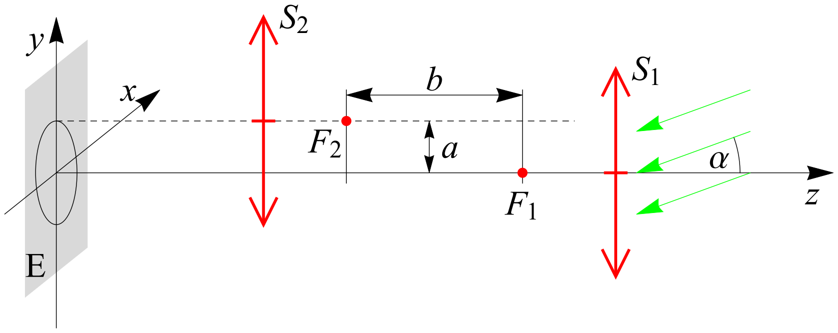
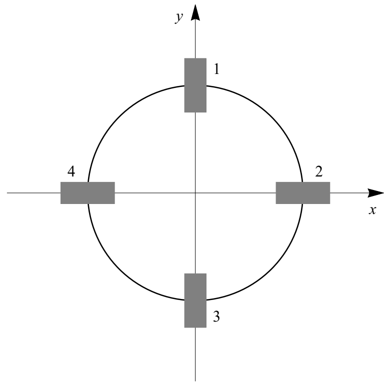
Задатак 1: Систем аутоматског навођења ракете (10 поена)

У овом задатку ћемо се бавити поједностављеним моделом система аутоматског навођења ракета. Оптичка схема система је приказана на слици 1. Систем се састоји од два сабирна сочива S_1 и S_2 са паралелним оптичким осама размакнутим на растојање a. Жижне даљине сочива су f_1 и f_2, респективно. Растојање између ближих жижа сочива дуж оптичких оса је b. Сочиво S_1 сабира светлосне зраке који долазе са мете у светлу мрљу. Сочиво S_2 пројектује ову мрљу у лик на екрану E.



Слика 1: Схема оптичког система за навођење ракете.



Слика 2: Систем сензора.

У случају када се ракета креће право ка мети, светлосни зраци су паралелни главној оптичкој оси сочива S_1, односно z-оси ($\alpha = 0$).

(а) **(1 поен)** Одредите на ком растојању l од центра другог сочива је потребно поставити екран, да би се на њему добила јасна слика. На ком растојању r_0 од осе система (главне оптичке осе сочива S_1) ће се налазити лик?

Сочиво S_2 ротира угаоном брзином ω тако да његова оса описује на екрану кружницу полупречника a и остаје све време паралелна оптичкој оси првог сочива. У случају када ракета лети право ка циљу, лик на екрану описује кружницу полупречника r_0. Када се ракета креће под углом α у односу на правац ка циљу, онда светлосни зраци падају под истим углом α на сочиво S_1. Промена упадног угла помера лик на екрану.

(б) **(1 поен)** Ако је угао α мали, одредити најмање и највеће растојање од центра екрана (главне оптичке осе првог сочива, односно z-осе) до лика.

(в) **(4 поена)** Одредити путању по којој је креће лик на екрану. Претпоставите да је мета померена у правцу y-осе.

У преосталим деловима задатка узмите да је растојање између жижа сочива једнако жижној даљини другог сочива, односно $b = f_2$.

Основа система аутоматског навођења ракете су четири уска оптичка сензора, постављена на екрану дуж оса x и y, као на слици 2. Парови сензора су на правцима који су нормални један на други.

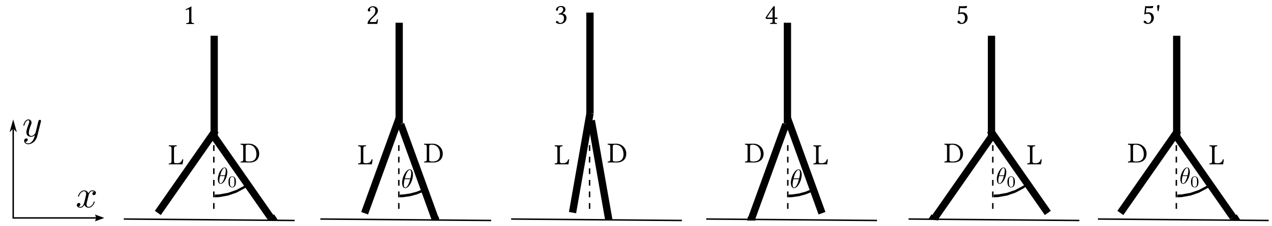
(г) **(3 поена)** Ако је мета отклоњена дуж y-осе, за неки угао α, одредите израз за интервале времена између детекција светлосних сигнала на суседним сензорима (1-2, 2-3,...).

(д) **(1 поен)** На основу претходног дела задатка објасните како ради систем аутоматског навођења ракете.

Задатак 2: Људски ход (10 поена)

У овом задатку размотрићемо модел људског хода у коме се људско тело састоји од три крута штапа који представљају ноге и труп. Карлица представља место где се спајају ноге и труп. При ходу труп остаје стално у вертикалном положају. Једна нога (коју ћемо звати стајна нога) је увек у додиру са подлогом, док се стопало друге ноге налази непосредно изнад подлоге, али није у контакту са подлогом. Сматрати да је коефицијент статичког трења између ноге и подлоге довољно велики да стајна нога не проклизава по подлози. Уколико другачије није наведено, сматрати да мишићи човека не врше рад, тј. да се човек креће само под дејством спољашњих сила.

Промене положаја човека током једног корака су приказане на слици 3. На почетку корака (тренутак 1) свака од ногу заклапа угао $\theta = \theta_0$ ($\theta_0 < 48^0$) са вертикалом. Карлица ротира око тачке додира стајне ноге са подлогом, па се угао θ смањује до тренутка кад ноге постану паралелне (тренутак 3), а затим се повећава до вредности $\theta = \theta_0$ (тренутак 5). У том тренутку долази до промене стајне ноге и то на следећи начин. Најпре стајна нога изгуби контакт са подлогом (нога D на слици 3 - тренутак 5), а непосредно након тога друга нога (нога L на слици 3 - тренутак 5') постаје стајна нога.



Слика 3: Положаји човека током једног корака у 5 различитих тренутака (означених од 1 до 5 и 5'). L означава леву, а D десну ногу.

Једноставности ради, сматраћемо да је целокупна маса човека концентрисана у карлици. Дужина ноге човека је l, маса човека је m, а интензитет убрзања силе Земљине теже је g. Интензитет брзине човека у тренутку кад су ноге паралелне је v_0.

(а) **(4 поена)** Извести услов који треба да задовољавају величине v_0, g, l и θ_0 тако да не долази до одвајања стајне ноге од подлоге.

(б) **(1 поен)** Одредити бројну вредност максималног могућег интензитета брзине ходања човека који се креће кратким кораком (мала вредност величине θ_0)? Дужина ноге човека је $l = 90\,\text{cm}$, а интензитет убрзања силе Земљине теже $g = 9{,}81\,\text{m/s}^2$. Упоредити добијени резултат са средњом брзином којом се креће најбољи ходач на 10 километара знајући да светски рекорд у овој дисциплини износи 37 минута и 11 секунди.

(в) **(4 поена)** Одредити израз за губитак кинетичке енергије ΔT човека током једног корака. У добијеном изразу треба да фигуришу величине m, l, θ_0, g и v_0.

(г) **(1 поен)** Колики рад по јединици дужине пута треба да изврше мишићи човека да би надокнадили губитак кинетичке енергије поменут у делу (в)? Израчунати одговарајућу бројну вредност ако је $\theta_0 = 10^0$, $v_0 = 2{,}0\,\text{m/s}$, $m = 75\,\text{kg}$, док су g и l дати у делу (б). Колико грама спанаћа треба да поједе човек да би имао довољно енергије да препешачи пут од $s = 10\,\text{km}$? 100 грама спанаћа има енергетску вредност од 28 kcal, при чему је $1\,\text{kcal} = 4{,}196\,\text{kJ}$.

Задатак 3: У земљи чуда (10 поена)

Планкова константа $h = 6{,}626 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s}$ је фундаментална физичка константа која заузима централно место у опису феномена карактеристичних за микросвет, као што су квантизација енергије, тунелирање кроз потенцијалну баријеру и слично. Славни физичар Џорџ Гамов (George Gamow) је у својој књизи *Господин Томпкинс у земљи чуда (Mr Tompkins in Wonderland)* описао да би, ако би Планкова константа била знатно већа, квантни феномени били видљиви голим оком. У овом задатку ћемо, проучавајући порекло топлотног зрачења извора нашег живота, Сунца, разумети да би повећање Планкове константе могло да има далеко озбиљније последице по живот на Земљи.

Приликом решавања задатка могу бити корисне вредности физичких константи: брзина светлости у вакууму $c = 2{,}998 \cdot 10^{8}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, гравитациона константа $\gamma = 6{,}674 \cdot 10^{-11}\ \frac{\mathrm{Nm^2}}{\mathrm{kg^2}}$, диелектрична пропустљивост вакуума $\varepsilon_0 = 8{,}854 \cdot 10^{-12}\ \frac{\mathrm{C^2}}{\mathrm{Nm^2}}$, маса протона $m_p = 1{,}673 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg}$, Штефан-Болцманова константа $\sigma = 5{,}670 \cdot 10^{-8}\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2K^4}}$, Болцманова константа $k_B = 1{,}381 \cdot 10^{-23}\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}$, полупречник Сунца $R_S = 6{,}957 \cdot 10^{8}\ \mathrm{m}$, маса Сунца $M_S = 1{,}989 \cdot 10^{30}\ \mathrm{kg}$, елементарно наелектрисање $q_0 = 1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C}$.

Део А (5 поена) Коначни циљ овог дела задатка је одређивање температуре, притиска и густине материје у центру Сунца, месту где започиње производња енергије коју примамо са Сунца. Да бисмо их одредили, користићемо модел енглеског астронома и физичара Артура Едингтона (Arthur Eddington) из 1926. године. Сматрати да је Сунце лопта полупречника R_S и масе M_S. Сунце је сферно симетрично, али није хомогено, тако да сви релевантни параметри којима се описује стање Сунчеве материје, као што су притисак $p(r)$, температура $T(r)$ и густина материје $\rho(r)$, зависе од растојања r од центра Сунца. Сунчева материја се може третирати као флуид у равнотежи који се налази у гравитационом пољу које је генерисано самом материјом.

A1 (1 поен) Одредити масу $M(r)$ дела Сунца који се налази унутар сфере полупречника r у функцији r, $p(r)$ и/или његових извода по r, $\rho(r)$ и/или њених извода по r и физичких константи. Добијени израз не треба да буде у облику интеграла.

Материја унутар Сунца се може сматрати високотемпературном плазмом која се састоји од водоника и хелијума. Плазма је у потпуности јонизована, односно сви атоми су раздвојени на језгра и електроне. У околини сваке тачке у унутрашњости Сунца, плазма је у локалној термодинамичкој равнотежи и може се третирати као смеша класичних идеалних гасова слободних електрона, језгара водоника и језгара хелијума. Сматрати да водоник чини $X = 70{,}0\%$, док хелијум чини $Y = 30{,}0\%$, масе елементарне запремине описане око сваке тачке у унутрашњости Сунца. Притисак $p(r)$ је збир притиска материје $p_{\mathrm{mat}}(r)$ и притиска топлотног зрачења $p_{\mathrm{rad}}(r) = \dfrac{4\sigma}{3c}[T(r)]^4$. Допринос притиска топлотног зрачења $p_{\mathrm{rad}}(r)$ укупном притиску $p(r)$ квантификован је параметром β $(0 < \beta < 1)$ који се дефинише релацијом $p_{\mathrm{rad}}(r) = \beta p(r)$. Претпоставка је да β не зависи од растојања од центра Сунца r.

A2 (1 поен) Написати релацију која повезује $p_{\mathrm{mat}}(r)$, $T(r)$ и $\rho(r)$ (у тој релацији могу фигурисати и величине X и Y и физичке константе). Маса атома водоника је $m_{\mathrm{H}} \approx m_p$, док је маса атома хелијума $m_{\mathrm{He}} \approx 4\, m_p$.

A3 (0,7 поена) Показати да је веза између притиска $p(r)$ и густине $\rho(r)$ облика $p(r) = K[\rho(r)]^{\kappa}$. Одредити реални број κ, а константу K изразити преко β, X, Y и физичких константи.

Означимо притисак у центру Сунца $p_c = p(0)$, температуру у центру Сунца $T_c = T(0)$ и густину материје у центру Сунца $\rho_c = \rho(0)$. Претпоставимо да је просторну зависност притиска, температуре и густине материје у потпуности могуће описати једном функцијом $\theta(r)$ која је дефинисана као $\dfrac{T(r)}{T_c} = \theta(r)$.

A4 (0,3 поена) Изразити $\dfrac{p(r)}{p_c}$ и $\dfrac{\rho(r)}{\rho_c}$ помоћу $\theta(r)$.

A5 (1 поен) Дефинишимо функцију $y(r) = -r^2 \dfrac{d\theta(r)}{dr}$. Вредност функције $y(r)$ за $r = R_S$ је $y(R_S) = y_S \sqrt{\dfrac{K}{\pi\gamma\rho_c^{2/3}}}$, где је K константа одређена у делу **A3**, док је $y_S = 2{,}018$. Изразити масу Сунца M_S помоћу K, y_S и физичких константи, па одредити вредност параметра β сматрајући да је $\beta \ll 1$. Уколико је потребно, ову претпоставку можете користити и у свим наредним деловима задатка.

A6 (1 поен) Изразити p_c, T_c и ρ_c у функцији $M_S, R_S, X, Y, y_S, \xi_S$ и физичких константи и израчунати њихове бројне вредности. Осим резултата свих претходних делова задатка, овде можете користити и $R_S = \xi_S \sqrt{\dfrac{K}{\pi\gamma\rho_c^{2/3}}}$, при чему је $\xi_S = 6{,}897$.

Део Б (2,5 поена) Енергија коју Сунце зрачи производи се у реакцијама термонуклеарне фузије које се дешавају у централном делу Сунца. Сматрати да су притисак, температура и густина материје у централном делу Сунца приближно константни и редом једнаки p_c, T_c и ρ_c који су одређени у делу **А6**. Уколико нисте урадили део **А6**, можете користити следеће бројне вредности: $p_c = 2{,}38 \cdot 10^{16}$ Pa, $T_c = 1{,}58 \cdot 10^7$ K и $\rho_c = 1{,}56 \cdot 10^5 \,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$ (ове вредности не треба користити за проверу резултата из дела **А6**).

Најважнији циклус реакција фузије у Сунцу је протонско-протонски циклус у којем се троше језгра водоника и формирају језгра хелијума уз ослобађање велике количине енергије. Овај циклус се састоји од више нуклеарних реакција. Прва реакција у низу, а то је фузија два протона у језгро деутеријума, је најспорија (најтеже се обавља) и самим тим одређује број протонско-протонских циклуса који се дешавају у јединици времена. Према класичној физици, да би два протона која започињу протонско-протонски циклус могла да ступе у реакцију фузије, они треба да се приближе на растојање које је једнако или мање од домета нуклеарних сила $r_0 = 1{,}0$ fm.

Б1 (0,4 поена) Посматрајмо два изолована протона који међусобно интерагују само Кулоновом интеракцијом. Протони се иницијално налазе на веома великом растојању (у поређењу са дометом Кулонове интеракције) и могу се кретати само дуж правца који их спаја. Ако је максимална вредност њихове укупне кинетичке енергије (у референтном систему центра масе) једнака $\frac{1}{2}\,k_B T_c$, израчунати минимално растојање $d_{\min}$ до којег се они могу приближити и изразити га у јединицама r_0.

Иако је $d_{\min}/r_0 \gg 1$, протони у централном делу Сунца јесу у домету нуклеарних сила. Објашњење за то лежи у законима квантне механике, према којима протони који ступају у нуклеарне реакције нису тачкасте честице са добро дефинисаним положајем и импулсом. У том смислу, густина вероватноће налажења протона у некој тачки је ненулта у сфери полупречника $a\lambda_{\mathrm{dB}}$ описаној око тачке у којој се према класичној физици протон налази. λ_{dB} је де Брољева таласна дужина протона који се креће највероватнијом брзином Максвелове расподеле протона по брзинама на температури T_c, док је a реална константа чија је вредност блиска јединици. Два протона ће бити у домету нуклеарних сила ако се приближе до растојања на којем се њима придружене горе дефинисане сфере почну преклапати.

Б2 (1,3 поена) Изразити однос M_S/R_S у функцији X, Y, y_S, ξ_S, a и следећих физичких константи: елементарно наелектрисање q_0, диелектрична пропустљивост вакуума ε_0, гравитациона константа γ и Планкова константа h.

Ипак, и када се посматрана два протона нађу у домету нуклеарних сила, да би нуклеарна реакција између њих била успешна, они морају да тунелирају кроз Кулонову баријеру. Детаљан квантно-механички прорачун, који је први спровео сам Гамов, даје да је број протонско-протонских циклуса који се у јединици времена десе у јединици запремине централног дела Сунца

$$\nu_{pp} = \frac{1}{2}\, n_{c,p}^2 \frac{\varepsilon_0 h}{m_p q_0^2}\; S_0\, \tau_c^2 e^{-\tau_c},$$

где је $n_{c,p}$ концентрација протона у централном делу Сунца, $S_0 = 1{,}00 \cdot 10^{-66}\,\mathrm{J \cdot m^2}$ је тзв. нуклеарни пресек реакције, док је $\tau_c = 3\left(\frac{\pi^2 q_0^4 m_p}{16\varepsilon_0^2 h^2 k_B T_c}\right)^{1/3}$. Ослобођена енергија у појединачном протонско-протонском циклусу је $\epsilon_{pp} = 26{,}2\,\mathrm{MeV}$.

Б3 (0,8 поена) Сматрати да се целокупна енергија ослобођена у протонско-протонским циклусима у централном делу Сунца емитује као топлотно зрачење кроз Сунчеву површину (фотосферу). Нека је централни део Сунца лопта (чији се центар поклапа са центром Сунца) полупречника $R_c = \eta R_S$, где је $\eta = 0{,}100$. Поменуто топлотно зрачење се може сматрати зрачењем апсолутно црног тела чија је температура једнака температури фотосфере T_S. Узимајући да је Сунце у топлотној равнотежи, израчунати T_S.

Део В (2,5 поена) Сада смо у могућности да истражујемо како би на карактеристике Сунца утицало повећање Планкове константе $\alpha = 2$ пута, $h_2 = \alpha h$, где је h стварна вредност Планкове константе, док субскриптом "2" означавамо вредности у новом свету. Нека се при томе вредности осталих фундаменталних физичких константи $(c, k_B, \gamma, \varepsilon_0, q_0, m_p)$, као ни осталих константи у овом задатку $(X, Y, y_S, \xi_S, a, S_0, \epsilon_{pp})$ не промене. Сматрати, такође, да се ни маса Сунца при томе не промени, односно $M_{S,2} = M_S$.

В1 (0,5 поена) Показује се да се Штефан-Болцманова константа може изразити преко физичких константи h, c и k_B у облику $\sigma = \dfrac{2\pi^5}{15}\, h^{n_1} k_B^{n_2} c^{n_3}$. Одредити реалне бројеве n_1, n_2 и n_3, па израчунати однос $\dfrac{\sigma_2}{\sigma}$.

В2 (1 поен) Израчунати односе $\dfrac{R_{S,2}}{R_S}$, $\dfrac{T_{c,2}}{T_c}$ и $\dfrac{T_{S,2}}{T_S}$.

В3 (1 поен) Спектрална емисиона моћ Сунца је дата изразом $e_\lambda = \dfrac{2\pi h c^2}{\lambda^5}\,\dfrac{1}{e^{hc/(\lambda k_B T_S)} - 1}$. Ако је λ_m таласна дужина на којој спектрална емисиона моћ постиже максималну вредност, израчунати однос $\dfrac{\lambda_{m,2}}{\lambda_m}$.

Задатке припремили: *др Ненад Вукмировић* (2) и *Вељко Јанковић* (3), Институт за физику у Београду
др Божидар Николић (1), Физички факултет у Београду
Рецензенти: *др Димитрије Степаненко* (1) и *Ана Худомал* (3), Институт за физику у Београду
др Петар Мали (2), Природно-математички факултет у Новом Саду
Председник Комисије за такмичења ученика средњих школа: *др Божидар Николић*, Физички факултет у Београду

Решење задатка 1

(а) Да би се добио јасан лик на екрану, екран треба да буде на месту лика који ствара друго сочиво. Светлосни зраци паралелни главној оптичкој оси сочива S_1 (оса система) се, после проласка кроз сочиво, сабирају у његовој жижи F_1. Ово место сабирања зрака је предмет за друго сочиво S_2, и налази се на растојању $d = f_2 + b$ од оптичког центра сочива S_2, а величина му је једнака a. Једначина (танког) сочива S_2 је:

$$\frac{1}{f_2} = \frac{1}{l} + \frac{1}{d}, \tag{1}$$

односно:

$$l = \frac{f_2(f_2 + b)}{b}. \tag{2}$$

Величина лика који ствара сочиво S_2 је $r_0 - a$, и може се израчунати из једначине увећања:

$$\frac{r_0 - a}{a} = \frac{l}{f_2 + b}, \tag{3}$$

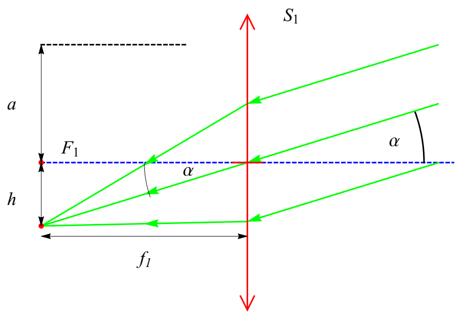
односно:

$$r_0 = a\left(1 + \frac{f_2}{b}\right). \tag{4}$$

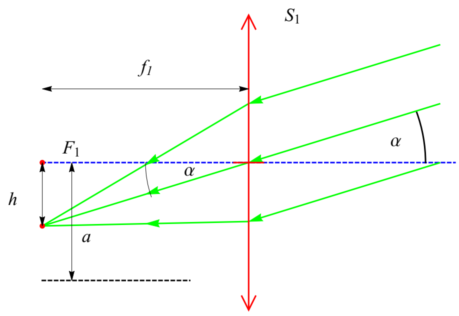
Увећање u је (биће потребно за касније):

$$u = \frac{l}{f_2 + b} = \frac{f_2}{b}. \tag{5}$$

(б) Светлосни зраци који под углом α, у односу на главну оптичку осу, падају на сочиво S_1, сабирају се у тачки која се налази на неком растојању h од оптичке осе, и удаљена је за f_1 од равни у којој је сочиво S_1 (слика 1). Растојање h је $h = f_1 \operatorname{tg}\alpha \approx \alpha f_1$ у случају када је угао α мали.



Слика 1: уз решење задатка 2(б).



Слика 2: уз решење задатка 2(б).

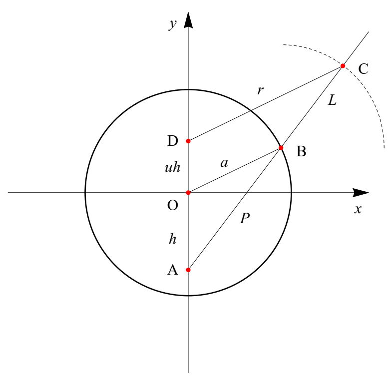
Растојање тачке сабирања зрака од оптичке осе сочива S_2 (величина предмета за S_2) се услед ротације сочива S_2 око главне осе система, мења од $a + h$ до $a - h$ (слика 2). Растојање лика од главне осе система (величина лика) се мења од $r_{min} - a$ до $r_{max} - a$. Екстремална растојања се добијају из једначина за увећање:

$$\frac{r_{min} - a}{a - h} = \frac{l}{d} = \frac{f_2}{b}, \quad \frac{r_{max} - a}{a + h} = \frac{l}{d} = \frac{f_2}{b}, \tag{6}$$

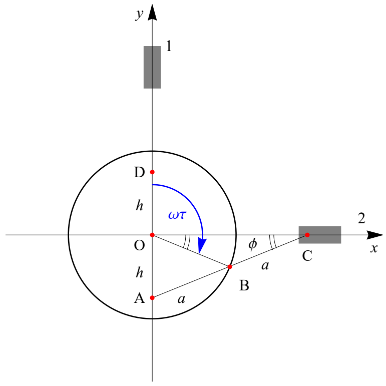
одакле се добија:

$$r_{min} = (a - \alpha f_1)\frac{f_2}{b} + a, \quad r_{max} = (a + \alpha f_1)\frac{f_2}{b} + a. \tag{7}$$

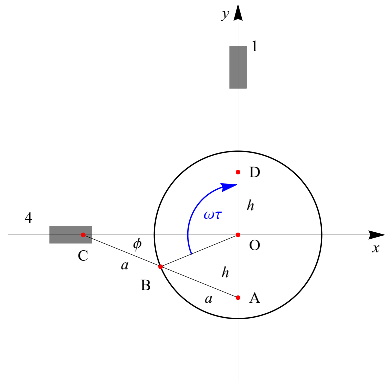
(в) Посматрајте кретање лика у xy равни, као што је приказано на слици 3. Главна оса система (оптичка оса првог сочива, односно z-оса) пролази кроз тачку O. Пројекција светле мрље, која је предмет за друго сочиво, се налази у тачки A, на растојању $h = \alpha f_1$, од осе система. Тачка пресека оптичке осе другог сочива и xy-равни се креће по кружници полупречника a, и нека се у неком тренутку налази у тачки B. Лик који ствара друго сочиво се налази на екрану у тачки C. Тачке A, B и C леже на истој правој, при чему дужина $\overline{AB} = P$ одговара величини предмета, док $\overline{BC} = L$ одговара величини лика за друго сочиво. Увећање другог сочива је $\frac{L}{P} = u$. Поставите тачку D на y-осу, тако да $\overline{OD} = uh$. Тада су троуглови AOB и ADC слични. Онда је $\frac{DC}{OB} = \frac{AD}{AO}$. Нека је $\overline{DC} = r$, онда је $\frac{r}{a} = \frac{(1+u)h}{h}$, односно $r = (1+u)a$. С обзиром да резултат не зависи од положаја осе другог сочива (тачке B), онда су тачке ликова током кретања увек подједнако удаљене од тачке D. Дакле, путања је кружница полупречника $r = (1+u)a$, са центром у тачки D.



Слика 3: уз решење задатка 2(в).



Слика 4: уз решење задатка 2(г).



Слика 5: уз решење задатка 2(г).

(г) Нека је у почетном тренутку сензор 1 детектовао светлост. Да би сензор 2 детектовао светлост, тачка C (из прошлог дела задатка) мора да буде на x-оси. Из услова задатка да је $b = f_2$ добија се да је увећање у том случају $u = 1$ (једначина 5). Тада је троугао OBC једнакокрак, и углови ϕ са слике су једнаки. Да би се тачка C нашла на x-оси, тачка B мора да опише угао $\frac{\pi}{2} + \phi$ (слика 4). Пошто тачка B ротира константном угаоном брзином ω, онда је $\omega\tau_{12} = \frac{\pi}{2} + \phi$. Са друге стране са слике је јасно да је $\sin\phi = \frac{h}{2a}$. Време потребно лику да пређе од сензора 1 до сензора 2 је:

$$\tau_{12} = \frac{1}{\omega}\left(\frac{\pi}{2} + \arcsin(\frac{\alpha f_1}{2a})\right). \tag{8}$$

Да би сензор 3 регистровао светлост, тачка C мора да буде на y-оси (негативном делу). Угао који сочиво опише да би лик прешао од сензора 2 до сензора 3 је $\frac{\pi}{2} - \phi$, за време:

$$\tau_{23} = \frac{1}{\omega}\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(\frac{\alpha f_1}{2a})\right). \tag{9}$$

Сензор 4 региструје светлост када је лик у тачки C на негативном делу x-осе, слика 5. На слици се види да сочиво мора да пребрише угао $\frac{\pi}{2} - \phi$, од тренутка када је сензор 3 регистровао светлост. Јасно је онда да је $\tau_{34} = \tau_{23}$. Коначно, угао који опише сочиво од тренутка када сензор 4 региструје светлост, до тренутка када се то деси на сензору 1 је $\frac{\pi}{2} + \phi$, па је $\tau_{41} = \tau_{12}$.

(д) Принцип рада система за навођење ракете се може схватити из једначина 8 и 9. Ако ракета лети право према циљу онда је $\alpha = 0$, и времена τ_{12} и τ_{23} су једнака. Ако ракета не иде директно ка циљу, онда се ова времена разликују. Ракета тада мења правац кретања све док се времена не поклопе, односно док правац кретања ракете не буде директно усмерен ка циљу.

Решење задатка 2

(а) Карлица се креће по кругу полупречника l, па је интензитет њене брзине $v = l\omega$, где је ω интензитет угаоне брзине ротације ноге. С обзиром да је по претпоставци задатка сва маса човека концентрисана у карлици, кинетичка енергија човека је $T(\theta) = \frac{1}{2}mv(\theta)^2 = \frac{1}{2}ml^2\omega(\theta)^2$. Гравитациона потенцијална енергија (уз референтни ниво постављен на подлогу) је $U(\theta) = mgl\cos\theta$. Из закона одржања енергије је $U(\theta) + T(\theta) = U(0) + T(0)$, одакле следи

$$\omega(\theta)^2 = \frac{v_0^2}{l^2} + \frac{2g}{l}\left(1 - \cos\theta\right). \tag{10}$$

Из другог Њутновог закона за кретање човека дуж $y-$осе следи

$$\frac{\mathrm{d}p_y}{\mathrm{d}t} = N - mg, \tag{11}$$

где је N интензитет силе реакције подлоге, а p_y је $y-$компонента импулса човека. $y-$координата човека је дата изразом $y = l\cos\theta$, одакле је $p_y = m\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -ml\dot{\theta}\sin\theta$, где је уведена скраћена ознака $\dot{\theta} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$. Даље диференцирањем следи

$$\frac{\mathrm{d}p_y}{\mathrm{d}t} = -ml\left(\dot{\theta}^2\cos\theta + \sin\theta\frac{\mathrm{d}\dot{\theta}}{\mathrm{d}t}\right). \tag{12}$$

Даље је

$$\frac{\mathrm{d}\dot{\theta}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\dot{\theta}}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \dot{\theta}\frac{\mathrm{d}\dot{\theta}}{\mathrm{d}\theta} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\dot{\theta}^2}{\mathrm{d}\theta}. \tag{13}$$

Користећи чињеницу да је у сваком тренутку $\omega(\theta)^2 = \dot{\theta}^2$ и тригонометријски идентитет $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$, из једначина 10, 11, 12 и 13 следи

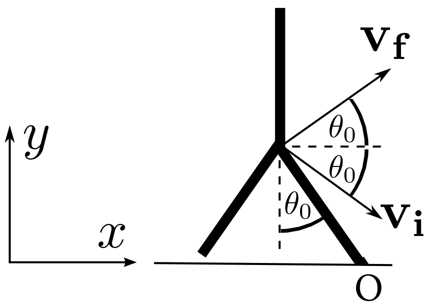
$$N = 3mg\cos^2\theta - 2mg\cos\theta - m\frac{v_0^2}{l}\cos\theta. \tag{14}$$

Да не би дошло до одвајања ноге од подлоге, потребно је да у сваком тренутку буде испуњен услов $N > 0$. Одатле следи $v_0^2 < gl\left(3\cos\theta - 2\right)$. Да би овај услов био испуњен за свако θ током кретања, треба да буде испуњен услов $v_0^2 < gl\left(3\cos\theta_0 - 2\right)$.

(б) За кретање кратким кораком важи $\theta_0 \approx 0$, па из решења претходног дела задатка следи $v_0^{\max} = \sqrt{gl} = 3{,}0\,\mathrm{m/s}$. Средња брзина светског рекордера у ходању је $v_{\mathrm{sr}} = \frac{s}{t}$, где је $s = 10\,\mathrm{km}$ и $t = 2231\,\mathrm{s}$, одакле је $v_{\mathrm{sr}} = 4{,}5\,\mathrm{m/s}$. Из добијеног резултата следи да је средња брзина светског рекордера већа од оне предвиђене решењем оваквог модела.
Напомена: Разлози за то могу бити једноставност коришћеног модела који ипак даје само процену максималне могуће брзине хода, као и чињеница да такмичари у ходању врше карактеристичне покрете карлицом којима омогућавају и постизање већих брзина, а да притом не дође до одвајања стајне ноге од подлоге. У брзом ходању је то посебно важно јер свако одвајање стајне ноге од подлоге доводи до опомене судије, а после три такве опомене такмичар бива дисквалификован.

(в) Човек губи кинетичку енергију у тренутку када промени стајну ногу. Приликом промене стајне ноге, најпре стајна нога изгуби контакт са подлогом при чему не долази до промене брзине човека. Затим при контакту друге ноге, која постаје стајна нога, са подлогом долази до нагле промене брзине човека. При том контакту се одржава момент импулса човека у односу на тачку додира нове стајне ноге са подлогом (тачка O на слици 6). Разлог за то је што је сила Земљине теже једина спољашња сила која делује на човека и има момент у односу на тачку O. Пошто нагла промена брзине траје кратко, а сила Земљине теже је коначна, промена момента импулса у односу на тачку O услед дејства силе теже је занемарљива. $z-$компонента момента импулса непосредно пре промене стајне ноге је $\left(L_z\right)_i = -mlv_i\cos\left(2\theta_0\right)$, где је v_i интензитет брзине непосредно пре промене стајне ноге. Непосредно након промене стајне ноге је $\left(L_z\right)_f = -mlv_f$, где је v_f интензитет брзине у том тренутку. Из услова $\left(L_z\right)_i = \left(L_z\right)_f$ следи $v_f = v_i\cos\left(2\theta_0\right)$. Губитак кинетичке енергије је притом $\Delta T = \frac{1}{2}m\left(v_i^2 - v_f^2\right)$. Из закона одржања енергије примењеног на тренутак у ком је $\theta = 0$ и тренутак непосредно пре промене стајне ноге следи $v_i^2 = v_0^2 + 2gl\left(1 - \cos\theta_0\right)$. Из претходних једначина следи

$$\Delta T = \frac{1}{2}ml^2\sin^2\left(2\theta_0\right)\left[\frac{v_0^2}{l^2} + \frac{2g}{l}\left(1 - \cos\theta_0\right)\right]. \tag{15}$$



Слика 6: уз решење дела задатка (в).

(г) При сваком кораку човек пређе пут $2l\sin\theta_0$ и изгуби кинетичку енергију ΔT. Тражени рад по јединици дужине пута који надокнађује тај губитак енергије је $A' = \frac{\Delta T}{2l\sin\theta_0} = 59{,}9\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}}$. На путу од $s = 10\mathrm{km}$ човек утроши енергију $E = A's = 599\,\mathrm{kJ} = 143\,\mathrm{kcal}$. Енергетска вредност спанаћа по јединици масе је $w = \frac{28\,\mathrm{kcal}}{100\,\mathrm{g}} = 280\,\frac{\mathrm{kcal}}{\mathrm{kg}}$, па је потребно да поједе $m_s = \frac{E}{w} = 510\,\mathrm{g}$ спанаћа.

Решење задатка 3

A1 Уочимо сферну љуску полупречника r и дебљине dr чија је запремина $dV(r) = 4\pi r^2 dr$, а маса $dM(r) = \rho(r)dV(r) = 4\pi r^2\rho(r)dr$. Гравитациона сила која делује на посматрану сферну љуску је $dF_G(r) = -\dfrac{\gamma M(r)\,dM(r)}{r^2}$, где је $M(r)$ маса дела Сунца који се налази унутар сфере полупречника r, док знак $-$ указује на то да је ова сила усмерена према центру Сунца. Сила притиска која делује на посматрану сферну љуску је $dF_p(r) = -(p(r+dr) - p(r))\cdot 4\pi r^2$. Из услова равнотеже $dF_G(r) + dF_p(r) = 0$ следи да је

$$M(r) = -\frac{1}{\gamma}\,\frac{r^2}{\rho(r)}\,\frac{dp(r)}{dr}.$$

A2 Важи $p_{\mathrm{mat}}(r) = n(r)k_BT(r)$, при чему је укупна концентрација $n(r) = n_e(r) + n_{\mathrm{H}^+}(r) + n_{\mathrm{He}^{2+}}(r)$, $n_e(r)$ је концентрација слободних електрона, $n_{\mathrm{H}^+}(r)$ је концентрација протона, док је $n_{\mathrm{He}^{2+}}(r)$ концентрација језгара хелијума. Концентрација слободних електрона је $n_e(r) = n_{\mathrm{H}^+}(r) + 2n_{\mathrm{He}^{2+}}(r)$, док се концентрације протона и језгара хелијума могу изразити преко густине $\rho(r)$ редом као $n_{\mathrm{H}^+}(r) = \dfrac{X\rho(r)}{m_{\mathrm{H}}}$ и $n_{\mathrm{He}^{2+}}(r) = \dfrac{Y\rho(r)}{m_{\mathrm{He}}}$. Дакле,

$$p_{\mathrm{mat}}(r) = \left(2X + \frac{3}{4}Y\right)\frac{\rho(r)}{m_p}k_BT(r).$$

A3 Из једначине стања материје, користећи $p_{\mathrm{mat}}(r) = (1-\beta)\,p(r)$, температура $T(r)$ се може написати у функцији $p(r)$ као $T(r) = \dfrac{1-\beta}{2X + \frac{3}{4}Y}\dfrac{p(r)m_p}{\rho(r)k_B}$, док се из једначине стања топлотног зрачења добија $T(r) = \left(\dfrac{3\beta c}{4\sigma}p(r)\right)^{1/4}$. Комбиновањем последње две једначине налазимо $p(r) = K[\rho(r)]^{\kappa}$, где је $\kappa = \dfrac{4}{3}$, док је

$$K = \left(\frac{\beta^{1/4}}{1-\beta}\left(2X + \frac{3}{4}Y\right)\frac{k_B}{m_p}\left(\frac{3c}{4\sigma}\right)^{1/4}\right)^{4/3}.$$

A4 Пошто је $p(r) = \dfrac{4\sigma}{3\beta c}\,[T(r)]^4$, следи $\dfrac{p(r)}{p_c} = [\theta(r)]^4$. Користећи решење дела **A3**, следи $\dfrac{\rho(r)}{\rho_c} = [\theta(r)]^3$.

A5 Користећи резултате делова **A1** и **A4** следи да је $M(r) = \dfrac{4p_c}{\gamma\rho_c}\,y(r)$, па је $M_S = \dfrac{4p_c}{\gamma\rho_c}\,y(R_S)$. Коришћењем везе између притиска и густине из дела **A3** могу се елиминисати p_c и ρ_c тако да се маса Сунца помоћу K изражава као $M_S = \dfrac{4y_S}{\sqrt{\pi}}\left(\dfrac{K}{\gamma}\right)^{3/2}$. Користећи израз за K добијен у делу **A3**, добија се једначина коју задовољава параметар β

$$\frac{\sqrt{\beta}}{(1-\beta)^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{3}y_S\,(2X + 3Y/4)^2}\left(\frac{\sigma\gamma^3}{c}\right)^{1/2}\left(\frac{m_p}{k_B}\right)^2 M_S.$$

Због $\beta \ll 1$, у најнижој апроксимацији можемо сматрати да је $\dfrac{\sqrt{\beta}}{(1-\beta)^2} \approx \sqrt{\beta}$, па коначно следи

$$\beta = \frac{\pi}{12y_S^2\,(2X + 3Y/4)^4}\frac{\sigma\gamma^3}{c}\left(\frac{m_p}{k_B}\right)^4 M_S^2,$$

што након замене бројних вредности даје $\beta = 4{,}42\cdot 10^{-4}$. Дакле, допринос притиска топлотног зрачења укупном притиску је веома мали.

A6 На основу **A5**, за однос K/γ важи $\dfrac{K}{\gamma} = \left(\dfrac{\sqrt{\pi}}{4y_S}\,M_S\right)^{2/3}$, док се на основу релације дате у поставци дела **A6** добија $\dfrac{K}{\gamma} = \dfrac{\pi}{\xi_S^2}\,R_S^2\,\rho_c^{2/3}$. Комбинујући последње две једначине, густина материје у центру Сунца је $\rho_c = \dfrac{\xi_S^3}{4\pi y_S}\,\dfrac{M_S}{R_S^3}$.

Даље, коришћењем везе између притиска и густине $p_c = K\rho_c^{4/3}$ и изражавањем параметра K у функцији M_S, следи да је притисак у центру Сунца $p_c = \dfrac{\xi_S^4}{16\pi y_S^2}\,\gamma\dfrac{M_S^2}{R_S^4}$. Температура у центру Сунца је онда $T_c = \left(\dfrac{3\beta c}{4\sigma}\,p_c\right)^{1/4}$, па следи $T_c = \dfrac{\xi_S}{4y_S\,(2X+3Y/4)}\gamma\dfrac{M_S}{R_S}\dfrac{m_p}{k_B}$.
Замена нумеричких података даје $\rho_c = 7{,}64\cdot 10^4\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$, $p_c = 1{,}25\cdot 10^{16}$ Pa и $T_c = 1{,}22\cdot 10^7$ K.

Б1 Закон одржања енергије примењен у референтном систему центра масе два протона у ситуацијама када је растојање између протона веома велико, односно минимално, даје $\dfrac{1}{2}\,k_BT_c = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\dfrac{q_0^2}{d_{\min}}$. Следи $d_{\min} = \dfrac{q_0^2}{2\pi\varepsilon_0 k_BT_c}$, односно након замене бројних података $d_{\min} = 2{,}75\cdot 10^{-12}$ m, односно $\frac{d_{\min}}{r_0} = 2{,}75\cdot 10^3$. Ученици који користе бројне вредности дате у тексту задатка добиће $d_{\min} = 2{,}11\cdot 10^{-12}$ m, односно $\frac{d_{\min}}{r_0} = 2{,}11\cdot 10^3$.

Б2 Највероватнија брзина протона је $v_{\mathrm{mp}} = \sqrt{\dfrac{2k_BT_c}{m_p}}$, па је де Брољева таласна дужина протона $\lambda_{\mathrm{dB}} = \dfrac{h}{\sqrt{2m_pk_BT_c}}$.
Замена бројних вредности даје $\lambda_{\mathrm{dB}} = 8{,}84\cdot 10^{-13}$ m (ученици који користе бројне вредности дате у тексту задатка треба да добију $\lambda_{\mathrm{dB}} = 7{,}75\cdot 10^{-13}$ m). Константу a можемо одабрати користећи да, када се сфере придружене протонима додирну, важи $d_{\min} = 2a\lambda_{\mathrm{dB}}$, односно $a = 1{,}55$ (ученици који користе бројне вредности дате у тексту задатка треба да добију $a = 1{,}36$). Коришћењем израза за T_c из дела **А6**, следи

$$\frac{M_S}{R_S} = \frac{4y_S\,(2X+3Y/4)}{\xi_S}\,\frac{k_BT_c}{\gamma m_p} = \frac{y_S\,(2X+3Y/4)}{2\pi^2a^2\xi_S}\,\frac{q_0^4}{\varepsilon_0^2h^2\gamma}.$$

Б3 Снага произведена у нуклеарним реакцијама у централном делу Сунца је $P_{\mathrm{prod}} = \nu_{pp}\cdot V_c\cdot\epsilon_{pp}$, где је запремина централног дела Сунца $V_c = \frac{4\pi}{3}\eta^3R_S^3$. С друге стране, снага емитована са фотосфере је $P_{\mathrm{emit}} = \sigma T_S^4\cdot 4\pi R_S^2$. Из услова $P_{\mathrm{prod}} = P_{\mathrm{emit}}$, уз коришћење $n_{c,p} = \dfrac{X\rho_c}{m_p}$, следи да је

$$T_S = \left(\frac{1}{6}X^2\eta^3\frac{\varepsilon_0h}{m_p^3q_0^2\sigma}\,\rho_c^2R_SS_0\tau_c^2e^{-\tau_c}\epsilon_{pp}\right)^{1/4}.$$

Након замене бројних података следи $T_S = 3{,}22\cdot 10^3$ K, док ученици који користе вредности дате у тексту задатка треба да добију $T_S = 5{,}98\cdot 10^3$ K.

В1 Ако су M, L, T и t редом димензије масе, дужине, времена и температуре, димензија Штефан-Болцманове константе је $MT^{-3}t^{-4}$. С друге стране, на основу израза датог у поставци задатка, димензија Штефан-Болцманове константе је $M^{n_1+n_2}L^{2n_1+2n_2+n_3}T^{-(n_1+2n_2+n_3)}t^{-n_2}$, па реалне константе n_1, n_2 и n_3 задовољавају једначине $n_1+n_2 = 1$, $2(n_1+n_2)+n_3 = 0$, $n_1+2n_2+n_3 = 3$ и $n_2 = 4$, те је $n_1 = -3$, $n_2 = 4$ и $n_3 = -2$, односно $\sigma = \dfrac{2\pi^5}{15}\,\dfrac{k_B^4}{h^3c^2}$. Зато је $\dfrac{\sigma_2}{\sigma} = \left(\dfrac{h_2}{h}\right)^{-3} = \alpha^{-3}$, односно $\dfrac{\sigma_2}{\sigma} = \dfrac{1}{8}$.

В2 На основу решења дела **Б2**, узимајући у обзир $M_{S,2} = M_S$, следи $\dfrac{R_{S,2}}{R_S} = \left(\dfrac{h_2}{h}\right)^2 = \alpha^2$, односно $\dfrac{R_{S,2}}{R_S} = 4$.
Даље, $\dfrac{T_{c,2}}{T_c} = \left(\dfrac{R_{S,2}}{R_S}\right)^{-1} = \alpha^{-2}$, па је $\dfrac{T_{c,2}}{T_c} = \dfrac{1}{4}$. Слично томе,

$$\frac{\tau_{c,2}}{\tau_c} = \left(\frac{h_2}{h}\right)^{-2/3}\left(\frac{T_{c,2}}{T_c}\right)^{-1/3} = 1,$$

$$\frac{T_{S,2}}{T_S} = \left(\frac{h_2}{h}\right)^{1/4}\left(\frac{\sigma_2}{\sigma}\right)^{-1/4}\left(\frac{\rho_{c,2}}{\rho_c}\right)^{1/2}\left(\frac{R_{S,2}}{R_S}\right)^{1/4}.$$

Имајући у виду да је

$$\frac{\rho_{c,2}}{\rho_c} = \left(\frac{R_{S,2}}{R_S}\right)^{-3} = \alpha^{-6},$$

следи да је $\dfrac{T_{S,2}}{T_S} = \alpha^{-3/2}$, односно $\dfrac{T_{S,2}}{T_S} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \approx 0{,}354$.

В3 На основу Виновог закона померања, таласна дужина λ_m за коју спектрална емисиона моћ Сунца постиже максимум је обрнуто пропорционална температури T_S. Међутим, и сама Винова константа зависи од Планкове константе. Погодно је уочити да се дати израз за e_λ може преписати као функција бездимензоналне величине $x = \dfrac{hc}{\lambda k_B T_S}$ као $e_\lambda = \dfrac{2\pi(k_B T_S)^5}{h^4 c^3}\,\dfrac{x^5}{e^x - 1}$. На основу претходног разматрања, функција $f(x) = \frac{x^5}{e^x-1}$ на интервалу $(0,+\infty)$ има само један екстремум, и то је максимум који се постиже за $x = x_m$. Таласна дужина λ_m је онда $\lambda_m = \dfrac{hc}{x_m k_B}\,\dfrac{1}{T_S}$. Пошто је x_m реална константа, следи

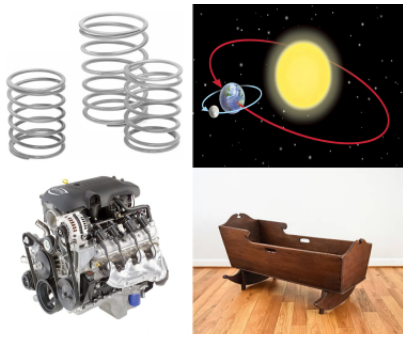
$$\frac{\lambda_{m,2}}{\lambda_m} = \frac{h_2}{h}\,\left(\frac{T_{S,2}}{T_S}\right)^{-1} = \alpha^{5/2},$$

па након замене бројних вредности следи $\dfrac{\lambda_{m,2}}{\lambda_m} = 4\sqrt{2} \approx 5{,}66$.

У свету са двоструко већом Планковом константом, површина Сунца би била 16 пута већа, а температура фотосфере би се смањила на око 35% вредности у нашем свету. Такође, најинтензивнији део спектра Сунчевог зрачења би се померио у инфрацрвену област. Под претпоставком да се положај Земље у односу на Сунце, као и њена величина, не промене, састав и функционисање организама у новом свету би били прилагођени нижој температури, док би се органи чула вида развили тако да буду најосетљивији на зрачење из инфрацрвеног дела спектра.

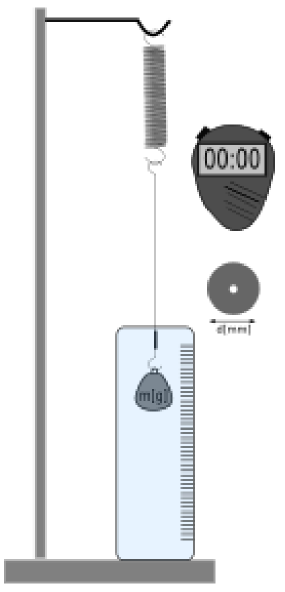
Задатке припремили: *др Ненад Вукмировић* (2) и *Вељко Јанковић* (3), Институт за физику у Београду
др Божидар Николић (1), Физички факултет у Београду
Рецензенти: *др Димитрије Степаненко* (1) и *Ана Худомал* (3), Институт за физику у Београду
др Петар Мали (2), Природно-математички факултет у Новом Саду
Председник Комисије за такмичења ученика средњих школа: *др Божидар Николић*, Физички факултет у Београду

Кретање система маса-опруга



Слика 1: *Примери периодичног кретања из свакодневног живота.*

Било да је у питању кретање Земље око Сунца, Месеца око Земље, светског океана током плиме и осеке, Халејеве комете или простог њихања биљака на ветру, периодично кретање се дешава у природи мимо нашег постојања и утицаја. Посматрањем ових феномена човек је брзо увидео да кретање које се понавља може да се предвиди. Тако је установио да се смена дана и ноћи понавља изнова и да један *дан* (оно што подразумевамо под периодом од 24 часа) траје исто колико и следећи и претходни и било који. Такође, приметио је да се кретање Сунца на небу након више стотина дана понавља и са њим и годишња доба, клима, цветање биљака, рађање плодова што га је навело на закључак да на основу вишегодишњег посматрања, може предвидети и планирати свој живот у складу са периодом који прати природу на планети Земљи. Овакав закључак и способност човека да препознаје обрасце у природи омогућили су му дуг опстанак, напредовање до врха ланца исхране, па чак и контролисање многих природних процеса. Поред природних феномена који представљају неки вид периодичног кретања, човек је изумео и алате који раде на бази природних принципа како би увео себи већи комфор у свакодневни живот и освојио нове територије. То је пут од колевке која сама љуља новорођенчад, преко опруга које амортизују силу, па до мотора са унутрашњим сагоревањем коме се додаје бензин како би се периодично кретање клипа мотора одржало у времену. Све су ово различити видови периодичног кретања које смо током нашег цивилизацијског развоја добро изучили и кренули да примењујемо у свакодневном животу.



Слика 2: *Скица апаратуре: сталак са опругом, градуисана боца, тег масе m, диск пречника d и штоперица.*

Математички најједноставнији облик периодичног кретања је кретање неког предмета у једној димензији. Како би ово кретање било периодично мора постојати нека сила (веза) која ће ограничавати слободно кретање. У случају жице са опругом, ова сила је добро познатареституциона сила која зависи од удаљености од неистегнутог (равнотежног) положаја. Ипак, овакво периодично кретање могло би се одвијати само у идеалним системима, без трења. Код реалних система потребно је узети у обзир и утицај околине на кретање тела. У принципу, сила којом средина у којој се врши кретање делује на тело зависи од особина средине (густине, вискозности,...) од облика тела и његове брзине кретања. На пример, људски организам је навикнут на кретање кроз ваздух и отпор ваздуха уопште не осећамо, осим у случају јаког ветра. За разлику од тога, приликом кретања кроз воду осећа се значајан отпор средине. Вожња на мотоциклу показаће да се отпор средине повећава са порастом брзине. Облик тела које се креће такође је врло важан и о њему се мора водити рачуна приликом конструкције брзих возова, авиона и слично, како би се смањио отпор средине а тиме и потрошња горива и прегревање тела која се крећу.

Кретање система маса-опруга када се изведе из равнотеже описује се добро познатом диференцијалном једначином другог реда. Ваш задатак је да, полазећи од ове једначине, одредите карактеристике система који је пред вама, односно да испитате како она описује један реалан систем. У ту сврху на располагању је апаратура (слика 2), која се састоји од сталка на који је обешена опруга са ушицама. На опругу је обешена жица са куком на коју се може додати тег масе m. Опруга, жица и тег заједно чине систем маса-опруга чије карактеристике треба утврдити. Поред тога, апаратуру чине и дискови пречника d који се уз помоћ матице могу причврстити на систем као и градуисана посуда са које се може очитавати положај система у било ком тренутку времена. Положај тега се мери очитавањем са посуде док се време мери уз помоћ сата са штоперицом. Експеримент је замишљен тако да се може мерити у ваздуху, води или глицерину.

ОПШТЕ НАПОМЕНЕ:

1) Ако вам је потребно да померате навише хоризонтални носач на који је окачена опруга, потребно је сталак придржати руком како се не би извукао из лежишта.
2) Пре мерења потребно је матицама причврстити црвени диск (занемарљиве масе) на жицу, непосредно изнад куке на коју се каче тегови. Овај диск не скидати са жице до краја експеримента.
3) Све битне кораке и претпоставке у извођењу, мерењу и интерпретацији детаљно описати и образложити!

Задатак 1 [4 поена]

Мерењем периода осциловања система маса-опруга у ваздуху за тегове различитих маса који су на располагању и цртањем одговарајућег графика одредити константу опруге и ефективну масу опруге (маса опруге заједно са жицом). Занемарити отпор ваздуха. Проценити грешке свих величина.

Задатак 2 [6 поена]

На куку окачити тег масе 100 g и сва мерења вршити са њим. У овом задатку није потребно одређивати грешке.

а) [1 поен] Извршити пробно мерење у води и на основу њега одредити карактер кретања система. Полазећи од једначине кретања система маса-опруга у средини са отпором (са исправно дефинисаним величинама и условима под којима важи), извести закон промене положаја тега у зависности од времена за случај кретања у води. Притом претпоставити да је сила отпора дата са $\mathbf{F}_o = -b\mathbf{v}$, где је b константа пропорционалности.

б) [3 поена] Осмислити најбољи начин мерења зависности положаја система од времена. Мерити ову зависност у довољном броју карактеристичних тачака и одредити период осциловања, ако постоји. Нацртати график зависности положаја система од времена.

в) [2 поена] Коришћењем измерене зависности положаја од времена одредити константу пропорционалности b.

Задатак 3 [10 поена]

Након мерења у води, а пре мерења у глицерину позвати дежурног члана комисије да воду у посуди замени глицерином. Поред црвеног диска, коришћеног у задацима 1 и 2, причврстити највећи диск на исти начин. Приликом мерења у овом задатку трудити се да диск буде довољно удаљен од зидова посуде. На куку окачити тег масе 100 g и сва мерења вршити са њим. У овом задатку није потребно одређивати грешке.

а) [4 поена] На најпогоднији начин мерити зависност положаја система од времена у глицерину, у довољном броју карактеристичних тачака, и одредити период осциловања, ако постоји. Нацртати график зависности положаја система од времена. Поступак поновити за још три необојена диска која су на располагању.

б) [1 поен] Полазећи од једначине кретања система маса-опруга у средини са отпором (са исправно дефинисаним величинама и условима под којима важи), извести закон промене положаја система у зависности од времена за случај кретања у глицерину. Претпоставити да је сила отпора дата са $\mathbf{F}_o = -b\mathbf{v}$, где је b константа пропорционалности.

в) [3 поена] Анализом и тумачењем добијеног израза и/или коришћењем одговарајућих графика одредити константу пропорционалности b . Поступак поновити за сваки диск појединачно.

г) [2 поена] Нацртати график зависности константе пропорционалности b од пречника диска. Објаснити добијену зависност. Предложити функцију којом би се она могла описати и анализом графика одредити потребне параметре у њој.

Нумерички подаци које можете користити (и чије се грешке могу занемарити):
Масе тегова: 35 g, 45 g, 65 g, 85 g, 100 g.
Масе дискова: 7,59 g, 6,83 g, 6,35 g, 5,91 g.
Пречници дискова: 60 mm, 57 mm, 55 mm, 53 mm.

ПОМОЋ:

Диференцијална једначина облика:

$$\ddot{x} + 2p\dot{x} + q^2 x = 0$$

где су p и q параметри који не зависе од времена, може се решавати усвајањем решења у облику $x(t) = e^{-pt}z(t)$ и даљом пажљивом анализом једначине по $z(t)$. Решења по $z(t)$ тражити из скупа елементарних функција. Ако два линеарно независна решења представљају партикуларна решења диференцијалне једначине наведеног облика, онда је опште решење те једначине њихова линеарна комбинација.

Задатке припремили: *Марко Опачић, др Данко Бошњаковић и Милан Јоцић*, Институт за физику у Београду
Рецензенти: *др Ненад Вукмировић и др Димитрије Степаненко*, Институт за физику у Београду
Председник Комисије за такмичења ученика средњих школа: *др Божидар Николић*, Физички факултет, Београд

Задатак 1.

Период осциловања тега дат је са

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_t + m_o}{k}}\ ,$$

где су m_t маса тега, m_o ефективна маса опруге и k константа опруге. За сваку масу тега, вршимо пет мерења времена (t_1,t_2,t_3,t_4,t_5) потребног да тег обави 20 осцилација. Период осциловања тега добијамо као $T = t_{sr}/20$ где је $t_{sr} = (t_1 + \ldots + t_5)/5$ израчунато средње време. Грешку средњег времена можемо проценити као

$$\Delta t_{sr} = \max(0{,}2\ \mathrm{s},\ \max_i |t_i - t_{sr}|)\ ,$$

где 0,2 s представља неодређеност времена реакције човека. Грешка периода дата је са $\Delta T = \Delta t_{sr}/20$. Израз погодан за добијање тражених величина линеаризацијом графика је

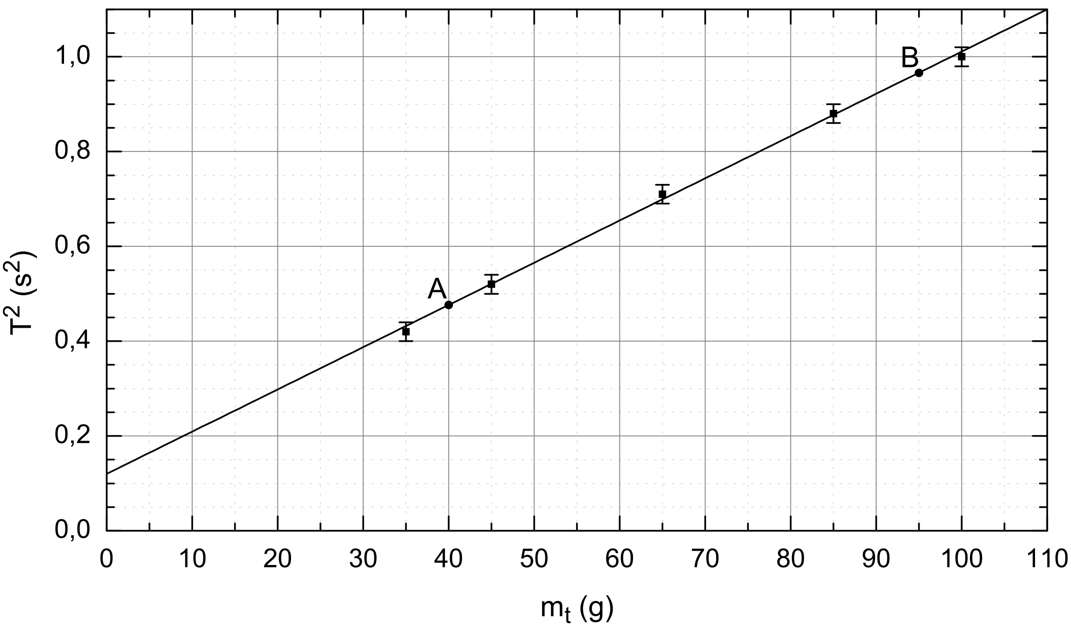
$$T^2 = \frac{4\pi^2}{k} m_t + \frac{4\pi^2}{k} m_o\ ,$$

док је одговарајућа грешка $\Delta T^2 = 2T\Delta T$. Примери измерених вредности, израчунатих величина и одговарајућих грешака дати су у табели 1. На основу ових вредности нацртан је график приказан на слици 1. На графику зависност T^2 од m_t представљамо оптималном правом $T^2 = p\,m_t + q$ која најмање одступа од измерених вредности. Коефицијент правца p одређујемо на основу две тачке изабране са оптималне праве нпр. $A(40\ \mathrm{g};\ 0{,}475\ \mathrm{s}^2)$ и $B(95\ \mathrm{g};\ 0{,}965\ \mathrm{s}^2)$:

$$p = \frac{(T^2)_B - (T^2)_A}{(m_t)_B - (m_t)_A} = 8{,}91 \cdot 10^{-3}\ \frac{\mathrm{s}^2}{\mathrm{g}}\ .$$

m_t(g)	t_1(s)	t_2(s)	t_3(s)	t_4(s)	t_5(s)	t_{sr}(s)	Δt_{sr}(s)	T(s)	ΔT(s)	T^2(s^2)	ΔT^2(s^2)
35	13,0	13,1	13,1	13,0	13,0	13,0	0,2	0,65	0,01	0,42	0,02
45	14,5	14,4	14,4	14,5	14,5	14,5	0,2	0,72	0,01	0,52	0,02
65	16,7	16,7	16,8	16,8	16,7	16,7	0,2	0,84	0,01	0,71	0,02
85	18,7	18,5	18,8	18,9	18,8	18,7	0,2	0,94	0,01	0,88	0,02
100	19,9	19,8	20,0	20,0	20,1	20,0	0,2	1,00	0,01	1,00	0,02

Табела 1: Примери измерених вредности, израчунатих величина и одговарајућих грешака тражених у задатку 1.



Слика 1: График коришћен за добијање параметара k и m_o методом оптималне праве.

Грешку коефицијента правца можемо израчунати на следећи начин:

$$\frac{\Delta p}{p} = \frac{\Delta((T^2)_B - (T^2)_A)}{(T^2)_B - (T^2)_A} = \frac{(\Delta T^2)_B + (\Delta T^2)_A}{(T^2)_B - (T^2)_A} = 8{,}2\% \;, \qquad \Delta p = 0{,}73 \cdot 10^{-3} \ \frac{\mathrm{s}^2}{\mathrm{g}} \ .$$

Константа опруге и грешка се добијају као

$$k = \frac{4\pi^2}{p} = 4{,}43 \ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} \ ,$$

$$\frac{\Delta k}{k} = \frac{\Delta p}{p} = 8{,}2\% \ , \qquad \Delta k = 0{,}36 \ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} \ ,$$

односно

$$k = (4{,}4 \pm 0{,}4) \ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} \ .$$

Очитавањем са графика налазимо да је одсечак $q = 0{,}12 \ \mathrm{s}^2$ док грешку можемо проценити као $\Delta q = \max(\Delta T^2) = 0{,}02 \ \mathrm{s}^2$. Ефективна маса опруге и одговарајућа грешка су

$$m_o = \frac{kq}{4\pi^2} = 13{,}5 \ \mathrm{g} \ ,$$

$$\frac{\Delta m_o}{m_o} = \frac{\Delta k}{k} + \frac{\Delta q}{q} = 24{,}9\% \ , \qquad \Delta m_o = 3{,}4 \ \mathrm{g} \ .$$

Коначно добијамо

$$m_o = (13 \pm 4) \ \mathrm{g} \ .$$

Задатак 2.

а) Пробе ради, пустимо тег да осцилује у води. Видимо да је у питању пригушено периодично кретање. Диференцијална једначина која описује кретање тега је

$$m\ddot{x} = mg - \rho V g - kx - b\dot{x} \ ,$$

где члан $\rho V g$ представља силу потиска у води. У стању мировања важи

$$mg - \rho V g = kx_r \ .$$

Увођењем смене $u \equiv x - x_r$ диференцијална једначина се своди на

$$\ddot{u} + \frac{b}{m}\,\dot{u} + \frac{k}{m}\,u = 0 \ .$$

Потражимо решење горње једначине у облику $u(t) = \exp(-\beta t)\,z(t)$ при чему је $\beta = b/2m$. Заменом добијамо

$$\ddot{z} + \omega^2 z = 0 \quad \text{где је} \quad \omega^2 = \frac{k}{m} - \beta^2 \ .$$

Опште решење ове диференцијалне једначине је

$$z(t) = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t) = C \cos(\omega t + \phi) \ .$$

Заменом се коначно добија

$$x(t) = x_r + C \exp\left(-\frac{b}{2m}\,t\right) \cos(\omega t + \phi) \ .$$

б) С обзиром на модел пригушеног периодичног кретања изведен у претходној тачки, најоптималнији начин мерења у овом случају се своди на мерење периода осциловања, којим се дефинишу временски тренуци карактеристичних тачака попут амплитудских и равнотежних положаја. Амплитудски положаји се затим одређују на основу више мерења уз исте почетне услове.

Наместимо систем тако да се у равнотежном стању црвени диск налази нпр. у положају $x'_r = 20$ cm на мерној скали. Мерења вршимо након што пустимо тег из почетног положаја нпр. $x'(0) = 16$ cm. Прво одређујемо период на исти начин као у задатку 1, мерећи неколико пута време потребно да тег обави 20 осцилација. Усредњавањем добијамо

$$T = 1{,}03 \ \mathrm{s} \ .$$

Затим у одговарајућим временским тренуцима меримо амплитудске положаје. Измерене вредности су приказане у табели 2 а тражени график је приказан на слици 2.

в) Приметимо да важи

$$|x'_r - x'(t)| = |C| \exp\left(-\frac{b}{2m}t\right) \quad \text{за} \quad t = n\,\frac{T}{2} \quad (n = 0,1,2,\ldots)\,.$$

Горњи израз се логаритмовањем своди на линеаран облик

$$\ln\frac{|x'_r - x'(t)|}{\mathrm{cm}} = \ln\frac{|C|}{\mathrm{cm}} - \left(\frac{bT}{2m}\right)\frac{t}{T}\,.$$

Користећи овај облик, параметар b можемо добити из коефицијента правца оптималне праве која најмање одступа од измерених вредности. На слици 3 је приказана оптимална права која одговара експерименталним тачкама. Тачке за $t/T > 4$ нису узете у обзир јер имају веће релативно одступање. Коефицијент правца се рачуна на исти начин као у задатку 1. На пример, на основу две тачке са оптималне праве $A(0{,}33;\ 1{,}3)$ и $B(3{,}8;\ 0{,}6)$, одређујемо коефицијент правца $p = -0{,}20$. Коначно добијамо

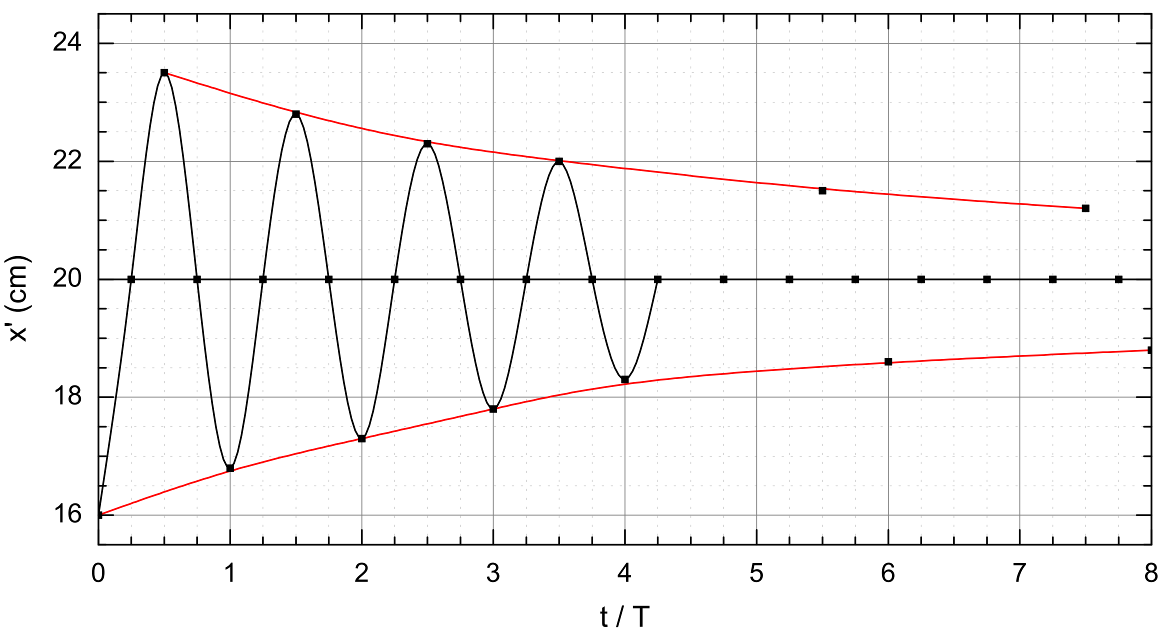
$$b = \frac{2(m_t + m_o)}{T}\,|p| = 44\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{s}}\,.$$

Задатак 3.

а) Пробним пуштањем тега са диском у глицерину видимо да се тег креће апериодично, при чему је његов положај монотона функција времена. У овом случају, најпогоднији начин мерења се састоји у избору неколико положаја за које ће се мерити време проласка тега. Наместимо систем тако да нам равнотежни положај диска буде у нпр. $x'_r = 20$ cm док пуштање вршимо из почетног положаја $x'(0) = 14$ cm. Измерене вредности за највећи диск пречника 60 mm су приказане у табели 3. На слици 4 је приказана зависност положаја диска од времена, измерена за сва четири диска.

t/T	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	5,5	6	7,5	8
x'_1 (cm)	16,0	23,5	16,8	22,7	17,4	22,3	17,7	22,1	18,2	21,6	18,7	21,2	18,8
x'_2 (cm)	16,0	23,4	16,8	22,8	17,3	22,2	17,9	22,0	18,3	21,5	18,5	21,2	18,8
x'_3 (cm)	16,0	23,5	16,8	22,8	17,3	22,3	17,8	21,9	18,3	21,5	18,5	21,2	18,7
x'_{sr} (cm)	16,0	23,5	16,8	22,8	17,3	22,3	17,8	22,0	18,3	21,5	18,6	21,2	18,8

Табела 2: Примери измерених амплитудских положаја у одговарајућим временским тренуцима.



Слика 2: График положаја диска у зависности од времена.

б) На исти начин као у задатку 2, долазимо до једначине

$$\ddot{z} + \left(\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}\right) z = 0 \ .$$

Како је кретање у глицерину апериодично, следи да је

$$-\gamma^2 \equiv \frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2} < 0 \ .$$

Диференцијална једначина

$$\ddot{z} - \gamma^2 z = 0$$

стога има опште решење

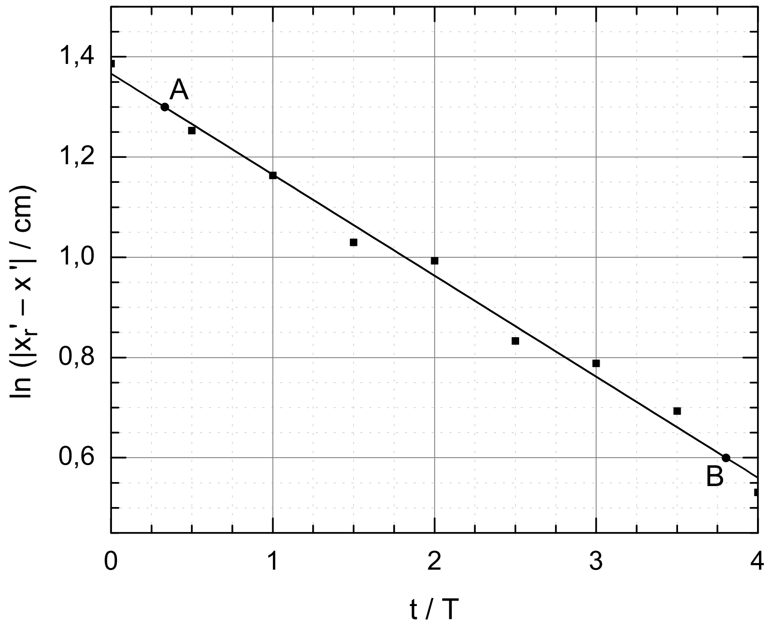
$$z(t) = C_1 \exp(-\gamma t) + C_2 \exp(\gamma t) \ .$$

Коначно, заменом добијамо

$$u(t) = x'_r - x'(t) = C_1 \exp\left(-\left(\frac{b}{2m} + \gamma\right) t\right) + C_2 \exp\left(-\left(\frac{b}{2m} - \gamma\right) t\right) \ .$$

в) Приметимо да први члан решења брже опада са временом од другог, односно да за довољно велико t важи

$$x'_r - x'(t) \approx C_2 \exp\left(-\left(\frac{b}{2m} - \gamma\right) t\right) \ .$$



Слика 3: Оптимална права која одговара измереним вредностима за случај кретања у води.

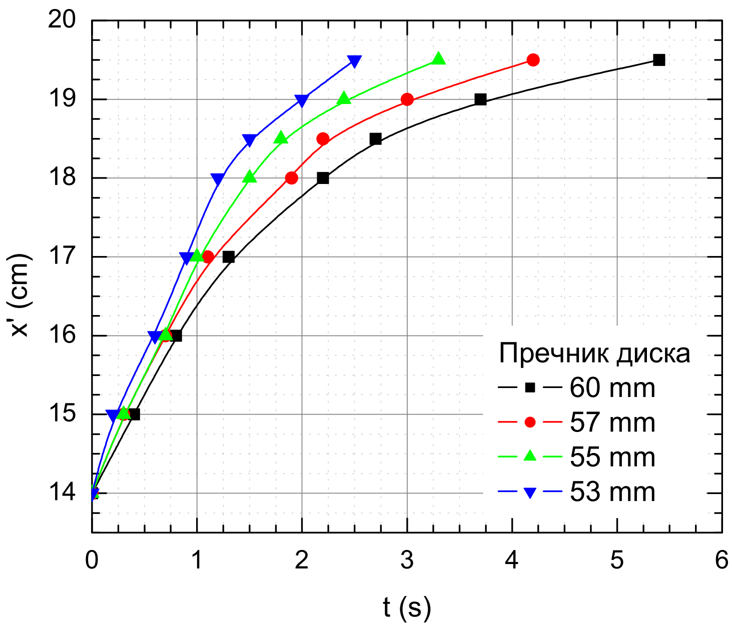
x' (cm)	14	15	16	17	18	18,5	19	19,5
t'_1 (s)	0	0,4	0,7	1,5	2,5	2,8	3,8	5,6
t'_2 (s)	0	0,4	0,8	1,3	2,4	2,6	3,8	5,2
t'_3 (s)	0	0,3	0,7	1,1	2,1	2,8	3,7	5,3
t'_4 (s)	0	0,4	0,8	1,2	2,1	2,6	3,9	5,6
t'_5 (s)	0	0,3	0,9	1,3	2,1	2,8	3,5	5,1
t'_{sr} (s)	0	0,4	0,8	1,3	2,2	2,7	3,7	5,4

Табела 3: Примери измерених зависности положаја од времена за диск пречника 60 mm.

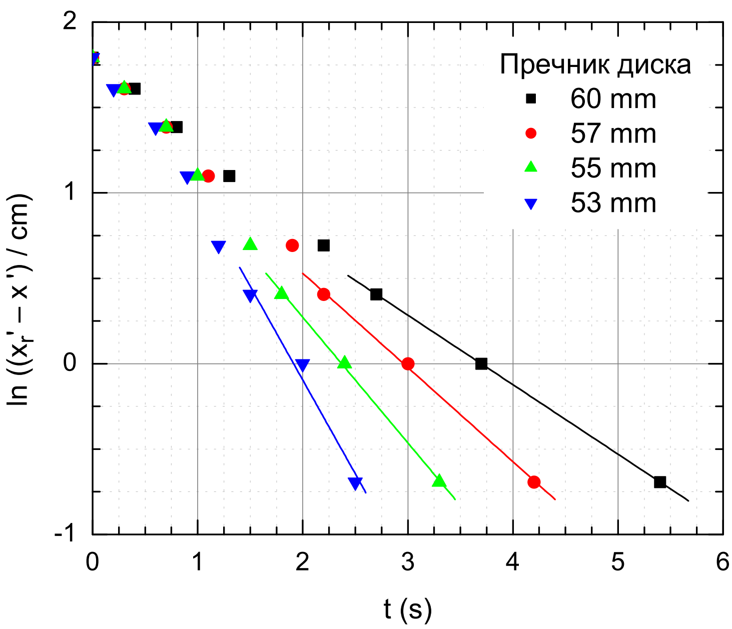
Логаритмовањем овог израза добијамо линеаран облик

$$\ln \frac{|x_r' - x'(t)|}{\mathrm{cm}} = \ln \frac{|C_2|}{\mathrm{cm}} - \left(\frac{b}{2m} - \gamma\right) t ,$$

на основу којег можемо одредити параметар b методом оптималне праве. За разлику од претходних задатака, узимамо у обзир само неколико тачака на логаритамском графику које за велико t показују приближно линеарну зависност од времена. Графици са оптималним правама за различите дискове су приказани на слици 5.



Слика 4: Зависност положаја диска од времена, измерена за четири диска различитих пречника.



Слика 5: Одређивање параметра b методом оптималне праве за четири диска различитих пречника.

Означимо са p коефицијент правца оптималне праве. Полазећи од

$$p = \frac{b}{2m} - \gamma = \frac{b}{2m} - \sqrt{\frac{b^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}\ ,$$

добијамо

$$b = mp + \frac{k}{p}\ ,$$

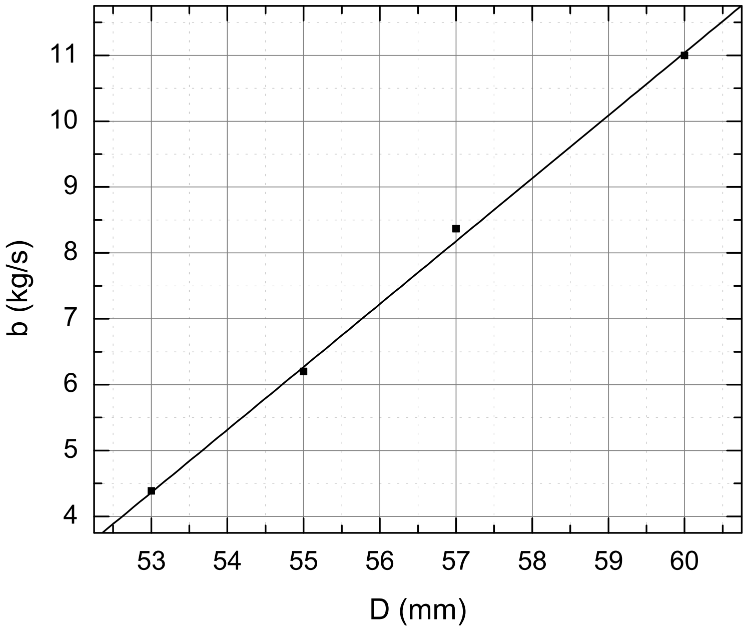
при чему маса $m = m_t + m_o + m_d$ укључује масу диска m_d. Заменом бројних вредности коначно добијамо:

Пречник диска:	60 mm	57 mm	55 mm	53 mm
p (1/s)	0,40	0,53	0,72	1,03
b (kg/s)	11,0	8,37	6,20	4,39

г) График зависности коефицијента b од пречника диска је приказан на слици 6. У измереном опсегу, ова зависност се може добро апроксимирати оптималном правом

$$b = p\,D + q\ ,$$

са параметрима $p = 0{,}954$ kg/s/mm и $q = -46{,}2$ kg/s који су одређени на исти начин као у задатку 1. Као решење се признаје и функција облика $b = p\,D^q$, при чему су параметри p и q одређени линеаризацијом.



Слика 6: Зависност коефицијента b од пречника диска.

Задатке припремили: *Марко Опачић*, *др Данко Бошњаковић* и *Милан Јоцић*, Институт за физику у Београду
Рецензенти: *др Ненад Вукмировић* и *др Димитрије Степаненко*, Институт за физику у Београду
Председник Комисије за такмичења ученика средњих школа: *др Божидар Николић*, Физички факултет, Београд