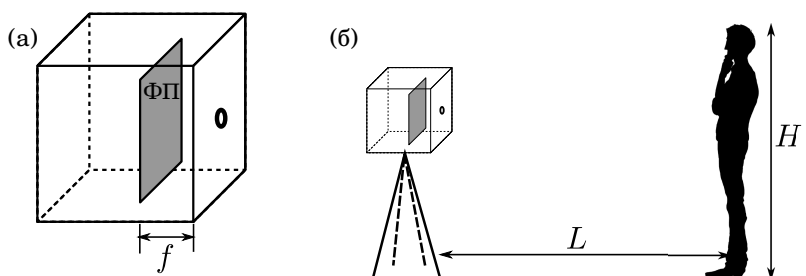
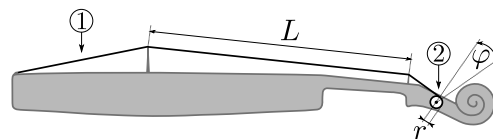


1. Две честице једнаких маса m крећу се једна према другој дуж истог правца брзинама једнаких интензитета v . Размотрити апсолутно нееластичан судар ових честица у оквиру специјалне теорије релативности.
- (а) Одредити промену масе Δm овог система при судару у функцији m , v и брзине светлости c . (14 поена)
(б) Израчунати Δm ако је $m = 1,0 \text{ kg}$ и $v = 1,0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. (6 поена)
Уколико је погодно, можете користити апроксимацију $(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$ која важи за $|x| \ll 1$ и $\alpha \in \mathbb{R}$.

2. Најстарији фотоапарати су функционисали по принципу мрачне коморе (лат. camera obscura). Састоје се од непрозирног спољашњег оклопа облика коцке, при чему је у пресеку дијагонала једне од бочних страна пробушен мали кружни отвор, видети слику 1 (а). На растојању $f = 10 \text{ cm}$ од те бочне стране постављена је фотоплоча (ФП) на којој се бележи фотографија. Користећи описани фотоапарат желимо да фотографишемо човека висине $H = 180 \text{ cm}$ који се налази на растојању $L = 5,0 \text{ m}$ од бочне стране са отвором, видети слику 1 (б). Одредити висину h човека на фотографији. Сматрати да је пречник кружног отвора знатно већи од таласне дужине светлости. (20 поена)



Слика 1: (а) Схематски приказ фотоапарата. (б) Фотографисање човека помоћу описаног фотоапарата.



Слика 2: Виолина; 1–жица, 2–чивија.

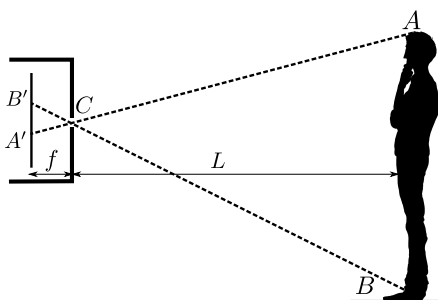
3. Звезда Алдебаран припада класи црвених џинова. Њена површинска температура је $T_A = 3,91 \cdot 10^3 \text{ K}$, а полупречник $R_A = 44,2 R_S$, где је R_S полупречник Сунца. На којој удаљености r од ове звезде би требало да буде планета величине Земље да би од ње у јединици времена примала исту енергију као и Земља од Сунца? Температура површине Сунца је $T_S = 5,78 \cdot 10^3 \text{ K}$, а удаљеност Земље од Сунца $r_Z = 1,50 \cdot 10^8 \text{ km}$. Сматрати да су звезде тачкасти извори светлости и да зраче као апсолутно црна тела. (20 поена)
4. У експерименту из 2014. године, амерички научници су утврдили да људски мозак може да перципира фотографије у боји које око посматра током временског интервала дужине $\Delta t = 13 \text{ ms}$. Фотони који пролазе кроз зеницу фокусирају се помоћу очног сочива на област мрежњаче која се назива фовеа и која је богата фоторецепторима чепићима помоћу којих видимо у боји. Површинска густина чепића у фовеи је $n = 1,5 \cdot 10^5 / \text{mm}^2$, а они су најосетљивији на светлост таласне дужине $\lambda = 550 \text{ nm}$. Минимални интензитет светлости на фовеи при којем је могућ вид у боји у описаном експерименту је $I = 100 \mu\text{W}/\text{m}^2$. Проценили број фотона који се при том интензитету апсорбују у једном чепићу. Једноставности ради, сматрати да је сваки фотон исте таласне дужине λ , да сваки стигне до фовее, да фотони падају нормално на фовеу, да су сви чепићи у фовеи идентични, да у потпуности покривају површину фовее, као и да сви апсорбују. (20 поена)
5. Виолина се обично штимује тако што се прво подеси да је основни хармоник треће жице нота ла, а затим се остале жице штимују у односу на њу. Фреквенција ноте ла је $\nu = 440 \text{ Hz}$. Жице су причвршћене на једном крају виолине, док су на другом крају намотане око чивија чијим се окретањем могу затезати или отпуштати, видети слику 2. Уколико раштумована трећа жица производи основни хармоник фреквенције $\nu' = 395 \text{ Hz}$, за који угао је потребно окренути чивију полупречника $r = 0,250 \text{ cm}$ да би ова жица била правилно наштумована? Коефицијент еластичности жице је $k = 1,70 \frac{\text{N}}{\text{mm}}$, маса по јединици дужине $\mu = 0,500 \frac{\text{g}}{\text{m}}$, а дужина дела жице који осцилује при превлачењу гудала је $L = 32,0 \text{ cm}$. (20 поена)

Приликом решавања задатака можете користити следеће бројне вредности универзалних физичких константи: Планкова константа $h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$, брзина светлости у вакууму $c = 2,998 \cdot 10^8 \text{ m/s}$.

Решења свих задатака треба јасно образложити и треба јасно навести све физичке законе и дефинисати све ознаке које се користе у решењу задатка.

*У фермионској категорији такмиче се ученици који похађају одељења која раде по програмима средњих стручних школа, уметничких школа и свих врста гимназија осим специјализованих гимназија за области математика и физика.

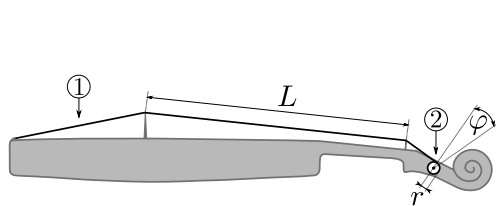
1. (а) Нека су M и P редом маса и интензитет импулса честице која настаје при судару. На основу закона одржања импулса одмах следи да је $P = 0$ [5п], док закон одржања енергије даје $Mc^2 = \frac{2mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ [5п], тако да је промена масе система при судару $\Delta m = M - 2m = 2m \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right)$ [4п]. (б) Када је $v \ll c$, применом приближне формуле дате у тексту задатка следи $\Delta m = m \frac{v^2}{c^2}$ [3п], па је након замене бројних вредности $\Delta m = 1,1 \cdot 10^{-17} \text{kg}$ [3п].
2. Са сваке тачке човека се емитује светлост у свим правцима, а у унутрашњост фотоапарата доспевају само зраци који пролазе кроз отвор C , видети слику 1. Лик највише тачке човека A је тачка A' , лик најниже тачке човека B је тачка B' [6п] за слику са правилно нацртаним ликом човека на фотоплочи, па из сличности троуглова $\triangle ABC$ и $\triangle A'B'C$ следи $\frac{A'B'}{AB} = \frac{f}{L}$ [10п]. Дакле, висина човека на фотографији је $h = \overline{A'B'} = H \frac{f}{L}$ [2п], односно након замене бројних вредности $h = 3,6 \text{ cm}$ [2п].



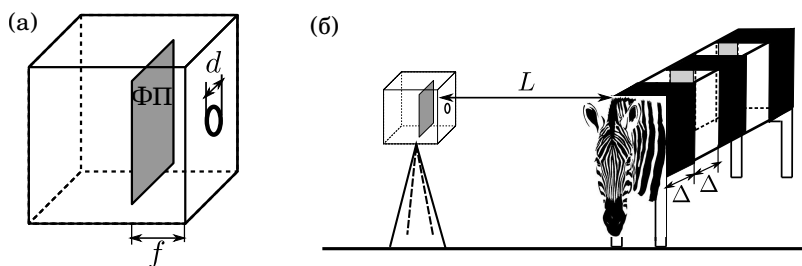
Слика 1: уз решење 2. задатка.

3. Енергија коју звезда полупречника R емитује у јединици времена је према Штефан-Болцмановом закону $P = \sigma T^4 S$ [5п], где је $S = 4\pi R^2$ [1п] површина звезде. До планете полупречника R_Z која се налази на удаљености r од звезде допире само онај део енергије коју звезда зрачи у просторни угао $\Omega = \frac{\pi R_Z^2}{r^2}$ [2п], па је снага коју планета прима $P' = P \frac{\Omega}{4\pi}$ [2п], одакле је $P' = \pi \sigma T^4 \frac{R^2 R_Z^2}{r^2}$ [2п]. Из услова задатка $P'_{\text{Aldebaran}} = P'_{\text{Sunce}}$ следи да је тражена удаљеност $r = \frac{T_A^2}{T_S^2} \frac{R_A}{R_S} r_Z$ [6п], односно $r = 3,03 \cdot 10^9 \text{ km}$ [2п].
4. Уз претпоставке уведене у тексту задатка, укупна енергија која за време Δt падне на јединицу површине фовее је $\frac{\Delta E_p}{\Delta S} = I \Delta t$ [4п], док је број чепића јединице површине фовее једнак $\frac{\Delta N_c}{\Delta S} = n$. С друге стране је $\frac{\Delta E_p}{\Delta S} = \frac{hc}{\lambda} \frac{\Delta N_p}{\Delta S}$ [6п], где је $\frac{\Delta N_p}{\Delta S}$ број фотона који за време Δt падне на јединицу површине фовее. Из претходних једначина следи да је број фотона који се апсорбују у једном чепићу при посматрању слике у боји у описаном експерименту једнак $\frac{\Delta N_p}{\Delta N_c} = \frac{I \lambda \Delta t}{nhc}$ [8п], па је након замене бројних вредности $\frac{\Delta N_p}{\Delta N_c} = 24$ [2п].
5. Брзина простирања трансверзалног таласа дуж затегнуте жице је $u = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$ [3п], где је F интензитет силе затезања жице, а μ маса жице по јединици дужине. Уколико је жица истегнута за x , важи $F = kx$ [1п]. Део жице који осцилује при превлачењу гудала има чворове на оба краја, тако да је таласна дужина основног хармоника жице $\lambda = 2L$ [5п], а фреквенција осциловања је $\nu = \frac{u}{\lambda}$ [1п]. Одатле следи да је дужина за коју је жица истегнута $x = 4L^2 \nu^2 \frac{\mu}{k}$ [2п]. При окретању чивије за угао φ дужина жице се промени за $x - x' = r\varphi$ [3п], па је тражени угао $\varphi = \frac{4L^2 \mu}{kr} (\nu^2 - \nu'^2)$ [3п], односно $\varphi = 1,81 \text{ rad} = 104^\circ$ [2п].

- Звезда Алдебаран припада класи првених црнова. Њена површинска температура је $T_A = 3,91 \cdot 10^3 \text{ K}$, а полупречник $R_A = 44,2 R_S$, где је R_S полупречник Сунца. На којој удаљености r од ове звезде би требало да буде планета величине Земље да би од ње у јединици времена примала исту енергију као и Земља од Сунца? Температура површине Сунца је $T_S = 5,78 \cdot 10^3 \text{ K}$, а удаљеност Земље од Сунца $r_Z = 1,50 \cdot 10^8 \text{ km}$. Сматрати да су звезде тачкасти извори светлости и да зраче као апсолутно црна тела. (20 поена)
- У експерименту из 2014. године, амерички научници су утврдили да људски мозак може да перципира фотографије у боји које око посматра током временског интервала дужине $\Delta t = 13 \text{ ms}$. Фотони који пролазе кроз зеницу фокусирају се помоћу очног сочива на област мрежњаче која се назива фовеа и која је богата фоторецепторима чепићима помоћу којих видимо у боји. Површинска густина чепића у фовеи је $n = 1,5 \cdot 10^5 / \text{mm}^2$, а они су најосетљивији на светлост таласне дужине $\lambda = 550 \text{ nm}$. Минимални интензитет светлости на фовеи при којем је могућ вид у боји у описаном експерименту је $I = 100 \mu\text{W}/\text{m}^2$. Процени број фотона који се при том интензитету апсорбују у једном чепићу. Једноставности ради, сматрати да је сваки фотон исте таласне дужине λ , да сваки стигне до фовее, да фотони падају нормално на фовеу, да су сви чепићи у фовеи идентични, да у потпуности покривају површину фовее, као и да сви апсорбују. (20 поена)
- Виолина се обично штимује тако што се прво подеси да је основни хармоник треће жице нота ла, а затим се остале жице штимују у односу на њу. Фреквенција ноте ла је $\nu = 440 \text{ Hz}$. Жице су причвршћене на једном крају виолине, док су на другом крају намотане око чивија чијим се окретањем могу затезати или отпустити, видети слику 1. Уколико раштумована трећа жица производи основни хармоник фреквенције $\nu' = 395 \text{ Hz}$, за који угао је потребно окренути чивију полупречника $r = 0,250 \text{ cm}$ да би ова жица била правилно наштумована? Коefицијент еластичности жице је $k = 1,70 \frac{\text{N}}{\text{mm}}$, маса по јединици дужине $\mu = 0,500 \frac{\text{g}}{\text{m}}$, а дужина дела жице који осцилује при превлачењу гудала је $L = 32,0 \text{ cm}$. (20 поена)



Слика 1: Виолина; 1–жица, 2–чивија.



Слика 2: (а) Схематски приказ фотоапарата. (б) Фотографисање зебре помоћу описаног фотоапарата.

- Две честице маса m_1 и m_2 крећу се једна према другој дуж истог правца брзинама чији су интензитети респективно v_1 и v_2 . Размотрити апсолутно нееластичан судар ових честица у оквиру специјалне теорије релативности.
 - Одредити промену масе Δm овог система при судару у функцији m_1, m_2, v_1, v_2 и брзине светлости c . (12 поена)
 - Израчунати Δm ако је $m_1 = 1,0 \text{ kg}$, $m_2 = 0,50 \text{ kg}$ и $v_1 = v_2 = 0,50 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. (8 поена)
 Уколико је погодно, можете користити апроксимацију $(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$ која важи за $|x| \ll 1$ и $\alpha \in \mathbb{R}$.
- Најстарији фотоапарати су функционисали по принципу мрачне коморе (лат. camera obscura). Састоје се од непрозирног спољашњег оклопа облика коцке, при чему је у пресеку дијагонала једне од бочних страна пробушен кружни отвор, видети слику 2(а). На растојању $f = 10 \text{ cm}$ од те бочне стране постављена је фотоплоча (ФП) на којој се бележи фотографија. Природњаци са почетка прошлог века желе да користећи описани фотоапарат фотографису зебру чији се бок налази на растојању $L = 10 \text{ m}$ од бочне стране са отвором и паралелан јој је, видети слику 2(б). Колики је највећи пречник d_{max} кружног отвора при којем се на фотографији уочавају (тамне) зебрине пруге? Претпоставити да су светле и тамне зебрине пруге периодично распоређене и једнаких ширина $\Delta = 10 \text{ cm}$. Сматрати да је пречник кружног отвора знатно већи од таласне дужине светлости. (20 поена)

Приликом решавања задатака можете користити следеће бројне вредности универзалних физичких константи: Планкова константа $h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$, брзина светлости у вакууму $c = 2,998 \cdot 10^8 \text{ m/s}$.

Решења свих задатака треба јасно образложити и треба јасно навести све физичке законе и дефинисати све ознаке које се користе у решењу задатка.

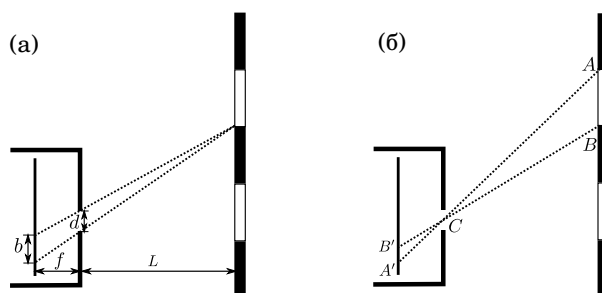
*У бозонској категорији такмиче се ученици који похађају одељења која раде по програмима специјализованих гимназија за област математика и физика.

1. Енергија коју звезда полупречника R емитује у јединици времена је према Штефан-Болцмановом закону $P = \sigma T^4 S$ [5п], где је $S = 4\pi R^2$ [1п] површина звезде. До планете полупречника R_Z која се налази на удаљености r од звезде допире само онај део енергије коју звезда зрачи у просторни угао $\Omega = \frac{\pi R_Z^2}{r^2}$ [2п], па је снага коју планета прима $P' = P \frac{\Omega}{4\pi}$ [2п], одакле је $P' = \pi \sigma T^4 \frac{R^2 R_Z^2}{r^2}$ [2п]. Из услова задатка $P'_{\text{Aldebaran}} = P'_{\text{Sunce}}$ следи да је тражена удаљеност $r = \frac{T_A^2}{T_S^2} \frac{R_A}{R_S} r_Z$ [6п], односно $r = 3,03 \cdot 10^9 \text{ km}$ [2п].
2. Уз претпоставке уведене у тексту задатка, укупна енергија која за време Δt падне на јединицу површине фовее је $\frac{\Delta E_p}{\Delta S} = I \Delta t$ [4п], док је број чепића јединице површине фовее једнак $\frac{\Delta N_c}{\Delta S} = n$. С друге стране је $\frac{\Delta E_p}{\Delta S} = \frac{hc}{\lambda} \frac{\Delta N_p}{\Delta S}$ [6п], где је $\frac{\Delta N_p}{\Delta S}$ број фотона који за време Δt падне на јединицу површине фовее. Из претходних једначина следи да је број фотона који се апсорбују у једном чепићу при посматрању слике у боји у описаном експерименту једнак $\frac{\Delta N_p}{\Delta N_c} = \frac{I \lambda \Delta t}{nhc}$ [8п], па је након замене бројних вредности $\frac{\Delta N_p}{\Delta N_c} = 24$ [2п].
3. Брзина простирања трансверзалног таласа дуж затегнуте жице је $u = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$ [3п], где је F интензитет силе затезања жице, а μ маса жице по јединици дужине. Уколико је жица истегнута за x , важи $F = kx$ [1п]. Део жице који осцилује при превлачењу гудала има чворове на оба краја, тако да је таласна дужина основног хармоника жице $\lambda = 2L$ [5п], а фреквенција осциловања је $\nu = \frac{u}{\lambda}$ [1п]. Одатле следи да је дужина за коју је жица истегнута $x = 4L^2 \nu^2 \frac{\mu}{k}$ [2п]. При окретању чивије за угао φ дужина жице се промени за $x - x' = r\varphi$ [3п], па је тражени угао $\varphi = \frac{4L^2 \mu}{kr} (\nu^2 - \nu'^2)$ [3п], односно $\varphi = 1,81 \text{ rad} = 104^\circ$ [2п].
4. (а) Нека су E и P редом енергија и интензитет импулса честице која настаје при судару. На основу закона одржања импулса је $P = |\gamma_1 m_1 v_1 - \gamma_2 m_2 v_2|$ [3п], док закон одржања енергије даје $E = (\gamma_1 m_1 + \gamma_2 m_2) c^2$ [3п], где је $\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta_1^2}}$, $\beta_1 = \frac{v_1}{c}$ и слично за γ_2 , β_2 . Маса честице настале при судару је $M = \frac{1}{c^2} \sqrt{E^2 - (cP)^2}$ [1п]. Заменом израза за E и P у последњу формулу, након преуређивања следи $M = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2 \gamma_1 \gamma_2 (1 + \beta_1 \beta_2)}$ [3п], тако да је промена масе система при судару

$$\Delta m = M - (m_1 + m_2) = (m_1 + m_2) \left(\sqrt{1 + \frac{2m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \left(\frac{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{v_1^2}{c^2}\right) \left(1 - \frac{v_2^2}{c^2}\right)}} - 1 \right)} - 1 \right) \quad [2п].$$

(б) Вишеструком применом приближне формуле дате у тексту задатка у добијеном изразу за Δm , при чему се треба задржати на доприносима закључно са другим редом по малим величинама $\frac{v_1}{c}$ и $\frac{v_2}{c}$ ($\frac{v_1^2}{c^2}$, $\frac{v_1 v_2}{c^2}$ и $\frac{v_2^2}{c^2}$), следи $\Delta m \approx \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{(v_1 + v_2)^2}{c^2}$ [5п], односно након замене бројних вредности $\Delta m = 1,9 \cdot 10^{-18} \text{ kg}$ [3п].

5. Са сваке тачке зебре се емитује светлост у свим правцима, а у унутрашњост фотоапарата доспевају само зраци који пролазе кроз отвор. Због коначних димензија отвора, лик сваке тачке зебре је круг пречника $b = d \left(1 + \frac{f}{L}\right)$ [6п],



Слика 1: уз решење 5. задатка.

где је d пречник отвора, што следи из сличности одговарајућих троуглова, видети слику 1 (а). Две суседне тамне зебрине пруге ће на фотографији бити раздвојене ако се ликови њихове две најближе тачке A и B не преклапају. Нека је C центар отвора и нека су A' и B' редом центри ликова тачака A и B , видети слику 1 (б). Из сличности троуглова $\triangle ABC$ и $\triangle A'B'C$ следи $\frac{A'B'}{AB} = \frac{f}{L}$, па је $A'B' = \Delta \frac{f}{L}$ [6п]. Ликови тачака A и B се не преклапају ако је $A'B' > b$, одакле следи $d < \Delta \frac{f/L}{1+f/L}$. Дакле, највећи пречник отвора при којем се на фотографији уочавају зебрине пруге је $d_{\text{max}} = \Delta \frac{f/L}{1+f/L}$ [6п]. Због $\frac{f}{L} \ll 1$, следи $d_{\text{max}} \approx \Delta \frac{f}{L}$, односно након замене бројних вредности $d_{\text{max}} = 1,0 \text{ mm}$ [2п].