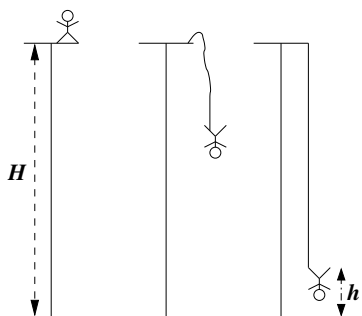
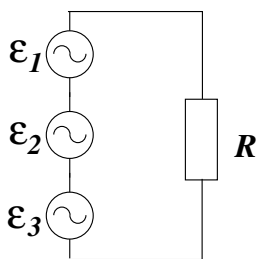


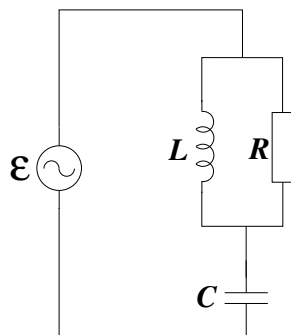
1. Једног дана Марија је одлучила да се опроба у екстремним спортовима. Одлука је пала на скок са високе платформе помоћу еластичног ужета, банци џамп. Платформа је мост висине $H = 50\text{ m}$ и план је да уже заустави Марију у најнижој тачки путање на $h = 2\text{ m}$ изнад површине воде. Коју дужину неистегнутог еластичног ужета Марија треба везати за своје ноге да би јој ово успело? Маса скакача је $m = 60\text{ kg}$, коефицијент еластичности ужета $k = 270\text{ N/m}$, а убрзање Земљине теже $g = 9,81\text{ m/s}^2$. Колико времена протекне од скока са моста до тренутка када се Марија заустави изнад површине воде? Занемарити масу ужета и отпор ваздуха. (20 поена)
2. Три извора наизменичног напона, једнаких фреквенци $f_1 = f_2 = f_3 = f = 220\text{ Hz}$, повезани су у редној вези и за њих је прикључен потрошач отпорности $R = 1\ \Omega$. Амплитудне вредности напона на изворима су редом $\varepsilon_{01} = 1\text{ V}$, $\varepsilon_{02} = 2\text{ V}$ и $\varepsilon_{03} = 3\text{ V}$, а фазе $\alpha_1 = 0^\circ$, $\alpha_2 = 45^\circ$ и $\alpha_3 = 30^\circ$, респективно. Наћи амплитуду, фреквенцу и фазу струје која тече кроз отпорник. (20 поена)
3. Док је седео у свом иглоу, мали Лутак је схватио да је ваздух који издише топлији од оног који удише. Уколико је температура ваздуха који удише 20°C , а температура ваздуха који издише 40°C , колико енергије на овај начин он преда унутрашњости иглоа у току једног сата. Узети да је запремина ваздуха који он удахне 0.5 l , и да у просеку удахне 12 пута за један минут. За атмосферски притисак узети 101325 Pa . (20 поена)
4. Електрично коло се састоји од паралелно везаних отпорника отпора $R = 1\text{ k}\Omega$ и завојнице индуктивности $L = 10\text{ mH}$ који су редно везани за кондензатор капацитета $C = 2\ \mu\text{F}$. Коло се напаја извором наизменичног напона амплитуде $V = 250\text{ V}$ и угаоне фреквенце $\omega = 2\pi f = 950\text{ rad/s}$. Нађите интензитет струје која пролази кроз кондензатор. Колики је интензитет ове струје у лимиту мале угаоне фреквенце? (20 поена)
5. Хомоген и прав штап дужине l и масе m може да ротира у хоризонталној равни око осе која је нормална на његов центар масе. Један крај штапа је спојен за опругу константе еластичности k_1 , други на опругу коефицијента еластичности k_2 , а центар масе на опругу коефицијента еластичности k (слика). У равнотежном положају, штап је паралелан са ослоном опруга. Одредити период малих осцилација штапа. (20 поена)



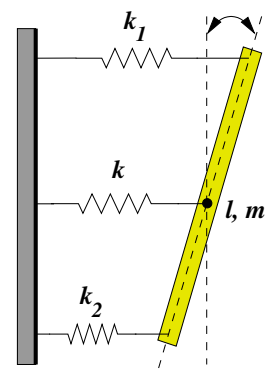
Слика уз задатак 1.



Слика уз задатак 2.



Слика уз задатак 4.

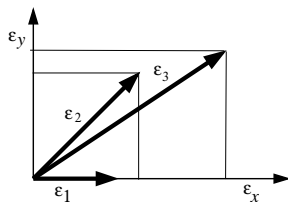


Слика уз задатак 5.



III разред

- Дужина ужета која је потребна да би се Марија зауставила на жељеном растојању одређено је одржањем енергије $mgH = mgh + \frac{k(H-h-L)^2}{2}$ [4п]. Одавде је $L = H - h - \sqrt{\frac{2mg(H-h)}{k}} = 33.5 \text{ m}$ [2п]. Време пада се састоји од три дела: време слободног пада t_1 , време током кога се уже затеже до положаја равнотеже сила, t_2 , и време током ког Марија успорава, t_3 . Време слободног пада се добија из $L = \frac{gt_1^2}{2}$ [1п], па је $t_1 = \sqrt{\frac{2L}{g}} = 2,61 \text{ s}$ [1п]. Време током ког Марија успорава је заправо једнако четвртини периода осциловања, где је кружна фреквенца осциловања $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ [2п], односно $t_3 = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{k}} = 0,74 \text{ s}$ [2п]. Преостало време се може добити из закона хармонијског осциловања $\Delta L = A \sin \omega t_2$ [3п]. Амплитуда овог осциловања је $A = H - L - h - \Delta L$ [1п], где је $\Delta L = \frac{mg}{k} = 2,2 \text{ m}$ [1п], па се одатле добија време $t_2 = \sqrt{\frac{m}{k}} \arcsin \frac{mg}{kA} = 0,084 \text{ s}$ [2п]. Укупно време пада је дакле $t = t_1 + t_2 + t_3 = 3,4 \text{ s}$ [1п].
- Еквивалентни извор ће такође имати фреквенцу f , а амплитуда се може одредити графички. Са слике $\varepsilon_{0x} = \varepsilon_{01} \cos \alpha_1 + \varepsilon_{02} \cos \alpha_2 + \varepsilon_{03} \cos \alpha_3$ [3п], односно $\varepsilon_{0y} = \varepsilon_{01} \sin \alpha_1 + \varepsilon_{02} \sin \alpha_2 + \varepsilon_{03} \sin \alpha_3$ [3п]. Интензитет електромоторне силе еквивалентног извора је $\varepsilon_t = \sqrt{\varepsilon_{0x}^2 + \varepsilon_{0y}^2}$ [3п]. Почетна фаза се одређује из израза $\text{tg } \alpha_t = \frac{\varepsilon_{0y}}{\varepsilon_{0x}}$ [4п]. Па је коначан израз за јачину струје кроз потрошач $i = \frac{\sqrt{\varepsilon_{0x}^2 + \varepsilon_{0y}^2}}{R} \cos(\omega t + \text{arctg } \frac{\varepsilon_{0y}}{\varepsilon_{0x}})$. Заменом нумеричких вредности, добија се $i = 5,8 \text{ A} \cos(2\pi \cdot 220 \text{ s}^{-1} \cdot t + 0,53 \text{ rad})$, где су углови мерени у радијанима, односно амплитуда струје је $i_0 = 5,8 \text{ A}$, фреквенца $f_i = f = 220 \text{ Hz}$, а фаза $\varphi_i = 0,53 \text{ rad}$ [7п].
- Како је ваздух приближно двоатомски гас, промена енергије спољашњег ваздуха је $\Delta U = \frac{5}{2} n R \Delta T$ [5п]. Количина супстанце у овом изразу се може добити преко једначине стања идеалног гаса $pV = nRT_1$ [4п]. При чему је укупна запремина $V = 60 \cdot 12 \cdot \Delta V$ [4п]. Одатле се добија да је топлота пренета спољашњости услед дисања еским $\Delta U = \frac{1800p\Delta V(T_2 - T_1)}{T_1}$ [4п], односно $\Delta U = 6,2 \text{ kJ}$ [3п]. Из овог разлога еским могу одржавати температуру у иглу на прихватљивом новоу за боравак.
- Струја кроз кондензатор је одређена Омовим законом за импедансе $i = u/Z$ [1п], где је u напон на извору, а Z еквивалентна импеданса кола. Комплексне импедансе елемената кола су $Z_R = R$, $Z_L = i\omega L$ и $Z_C = -i/(\omega C)$ [1п]. Импеданса паралелне везе отпорника и завојнице је $Z_{RL} = \frac{Z_R Z_L}{Z_R + Z_L} = \frac{i\omega L R}{i\omega L + R}$ [3п], а импеданса целог кола $Z = Z_{RL} + Z_C = \frac{\omega^2 L^2 R}{R^2 + (\omega L)^2} + i \left(\frac{\omega L R^2}{R^2 + (\omega L)^2} - \frac{1}{\omega C} \right)$ [3п], са апсолутном вредношћу $|Z| = \sqrt{\left(\frac{\omega^2 L^2 R}{R^2 + (\omega L)^2} \right)^2 + \left(\frac{\omega L R^2}{R^2 + (\omega L)^2} - \frac{1}{\omega C} \right)^2}$ [5п] и струјом $|i| = V \left[\left(\frac{\omega^2 L^2 R}{R^2 + (\omega L)^2} \right)^2 + \left(\frac{\omega L R^2}{R^2 + (\omega L)^2} - \frac{1}{\omega C} \right)^2 \right]^{-1/2}$ [3п]. Замена бројних вредности даје $|i| = 0,48 \text{ A}$ [3п]. У нискофреквентном лимиту струја не може тећи кроз кондензатор, $i_0 = 0$ [1п].
- На крајеве штапа делују momenti сила истезања опруга, док је момент силе која делује на осу ротације нула [5п]. Укупан момент сила је $M = M_1 + M_2 = (k_1 + k_2) \frac{l^2}{4} \sin \varphi \cos \varphi$, где је φ угао одступања правца штапа од равнотеже. [3п] Момент инерције штапа око осе ротације је $I = ml^2/12$. [2п] У лимиту малих осцилација $I\alpha = \frac{l^2}{4} (k_1 + k_2) \sin \varphi \cos \varphi \approx \frac{l^2}{4} (k_1 + k_2) \varphi$, па је угаона фреквенца осцилација $\omega = \sqrt{\frac{3(k_1 + k_2)}{m}}$ [8п] и период $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{3(k_1 + k_2)}}$. [2п]



Слика уз решење задатка 2.

У свим задацима тачна бројна вредност доноси [2п] и тачна јединица [1п].

Задатке припремили: *др Владан Павловић*, Природно-математички факултет, Ниш

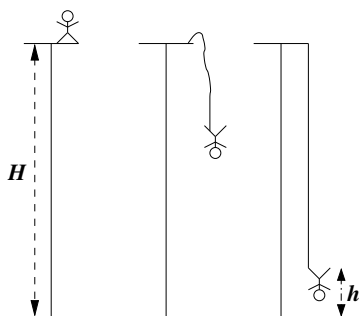
Марко Кузмановић, Universite Paris-Sud, France

Илија Иванишевић, Институт за физику, Београд

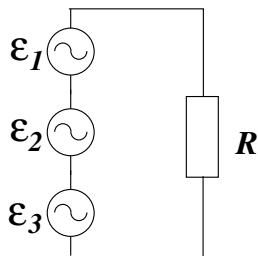
Рецензент: *др Димитрије Степаненко*, Институт за физику, Београд

Председник Комисије за такмичења средњих школа: *др Божидар Николић*, Физички факултет, Београд

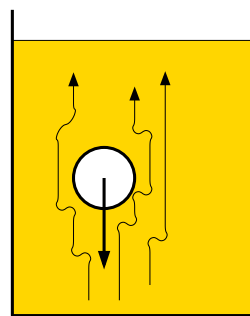
1. Једног дана Марија је одлучила да се опроба у екстремним спортовима. Одлука је пала на скок са високе платформе помоћу еластичног ужета, банци џамп. Платформа је мост висине $H = 50 \text{ m}$ и план је да уже заустави Марију у најнижој тачки путање на $h = 2 \text{ m}$ изнад површине воде. Коју дужину неистегнутог еластичног ужета Марија треба везати за своје ноге да би јој ово успело? Маса скакача је $m = 60 \text{ kg}$, коефицијент еластичности ужета $k = 270 \text{ N/m}$, а убрзање Земљине теже $g = 9,81 \text{ m/s}^2$. Колико времена протекне од скока са моста до тренутка када се Марија заустави изнад површине воде? Занемарити масу ужета и отпор ваздуха. (20 поена)
2. Три извора наизменичног напона, једнаких фреквенци $f_1 = f_2 = f_3 = f = 220 \text{ Hz}$, повезани су у редној вези и за њих је прикључен потрошач отпорности $R = 1 \Omega$. Амплитудне вредности напона на изворима су редом $\varepsilon_{01} = 1 \text{ V}$, $\varepsilon_{02} = 2 \text{ V}$ и $\varepsilon_{03} = 3 \text{ V}$, а фазе $\alpha_1 = 0^\circ$, $\alpha_2 = 45^\circ$ и $\alpha_3 = 30^\circ$, респективно. Наћи амплитуду, фреквенцу и фазу струје која тече кроз отпорник. (20 поена)
3. Метална лопта запремине $V = 1 \text{ cm}^3$ тоне константном брзином $v = 1 \text{ cm/s}$ у тегли испуњеној медом, као на приложеној слици. Колики је импулс меда, уколико је густина меда $\rho_1 = 2 \text{ g/cm}^3$, а густина металне лопте $\rho_2 = 8 \text{ g/cm}^3$? (20 поена)
4. Електрично коло се састоји од паралелно везаних отпорника отпора $R = 1 \text{ k}\Omega$ и завојнице индуктивности $L = 10 \text{ mH}$ који су редно везани за кондензатор капацитета $C = 2 \mu\text{F}$, као на приложеној слици. Коло се напаја извором наизменичног напона амплитуде $V = 250 \text{ V}$ и угаоне фреквенце $\omega = 2\pi f = 950 \text{ rad/s}$. Нађите интензитет струје која пролази кроз кондензатор. Колики је интензитет ове струје у лимиту мале угаоне фреквенце? (20 поена)
5. Хармонијски осцилатор се у средини која пружа отпор креће по закону $x(t) = Ae^{-\gamma t} \cos(\omega t + \phi)$. Параметар γ описује опадање амплитуде осцилација са временом док осцилатор предаје енергију околина услед отпора. Параметар ω је угаона фреквенца осциловања модификована отпором средине. Константе A и ϕ су одређене почетним условима. Када је отпор средине мали, $\gamma \ll \omega$, осцилације се понављају са споро опадајућом амплитудом. Код екстремног пригушења, $\gamma \gg \omega$, дисипација распе енергију система на околина у периоду који је краћи од периода осцилација. У тренутку $t = 0$ пригушени осцилатор је почео кретање са позиције x_0 без почетне брзине. Одредити његов пређени пут од $t = 0$ до заустављања у функцији параметара γ и ω и позиције x_0 . Како ваш резултат изгледа у случајевима слабог пригушења, $\gamma/\omega \rightarrow 0$, и јаког пригушења, $\gamma/\omega \rightarrow \infty$? Помоћ: $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots = \frac{1}{1-q}$ када је $q < 1$. (20 поена)



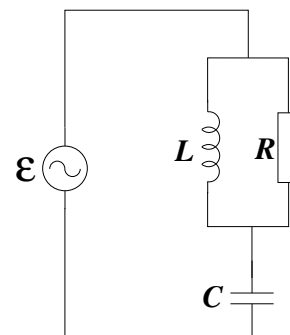
Слика уз задатак 1.



Слика уз задатак 2.



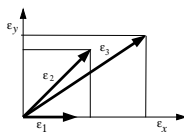
Слика уз задатак 3.



Слика уз задатак 4.



- Дужина ужета која је потребна да би се Марија зауставила на жељеном растојању одређено је одржањем енергије $mgH = mgh + \frac{k(H-h-L)^2}{2}$ [4п]. Одавде је $L = H - h - \sqrt{\frac{2mg(H-h)}{k}} = 33.5 \text{ m}$ [2п]. Време пада се састоји од три дела: време слободног пада t_1 , време током кога се уже затеже до положаја равнотеже сила, t_2 , и време током ког Марија успорава, t_3 . Време слободног пада се добија из $L = \frac{gt_1^2}{2}$ [1п], па је $t_1 = \sqrt{\frac{2L}{g}} = 2,61 \text{ s}$ [1п]. Време током ког Марија успорава је заправо једнако четвртини периода осциловања, где је кружна фреквенца осциловања $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ [2п], односно $t_3 = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{k}} = 0,74 \text{ s}$ [2п]. Преостало време се може добити из закона хармонијског осциловања $\Delta L = A \sin \omega t_2$ [3п]. Амплитуда овог осциловања је $A = H - L - h - \Delta L$ [1п], где је $\Delta L = \frac{mg}{k} = 2,2 \text{ m}$ [1п], па се одатле добија време $t_2 = \sqrt{\frac{m}{k}} \arcsin \frac{mg}{kA} = 0,084 \text{ s}$ [2п]. Укупно време пада је дакле $t = t_1 + t_2 + t_3 = 3,4 \text{ s}$ [1п].
- Еквивалентни извор ће такође имати фреквенцу f , а амплитуда се може одредити графички. Са слике $\varepsilon_{0x} = \varepsilon_{01} \cos \alpha_1 + \varepsilon_{02} \cos \alpha_2 + \varepsilon_{03} \cos \alpha_3$ [3п], односно $\varepsilon_{0y} = \varepsilon_{01} \sin \alpha_1 + \varepsilon_{02} \sin \alpha_2 + \varepsilon_{03} \sin \alpha_3$ [3п]. Интензитет електромоторне силе еквивалентног извора је $\varepsilon_t = \sqrt{\varepsilon_{0x}^2 + \varepsilon_{0y}^2}$ [3п]. Почетна фаза се одређује из израза $\text{tg } \alpha_t = \frac{\varepsilon_{0y}}{\varepsilon_{0x}}$ [4п]. Па је коначан израз за јачину струје кроз потрошач $i = \frac{\sqrt{\varepsilon_{0x}^2 + \varepsilon_{0y}^2}}{R} \cos \left(\omega t + \arctg \frac{\varepsilon_{0y}}{\varepsilon_{0x}} \right)$. Заменом нумеричких вредности, добија се $i = 5,8 \text{ A} \cos(2\pi \cdot 220 \text{ s}^{-1} \cdot t + 0,53 \text{ rad})$, где су углови мерени у радијанима, односно амплитуда струје је $i_0 = 5,8 \text{ A}$, фреквенца $f_i = f = 220 \text{ Hz}$, а фаза $\varphi_i = 0,53 \text{ rad}$ [7п].
- Кретање металне куглице кроз мед надоле, је "еквивалентно" кретању куглице од меда, исте запремине и исте брзине на горе. Импулс меда је дакле $p = mV$ [5п], односно $p = \rho_1 V v$ [10п], одавде следи $p = 2 \cdot 10^{-5} \text{ kgm/s}$ [5п].
- Струја кроз кондензатор је одређена Омовим законом за импедансе $i = u/Z$ [1п], где је u напон на извору, а Z еквивалентна импеданса кола. Комплексне импедансе елемената кола су $Z_R = R$, $Z_L = i\omega L$ и $Z_C = -i/(\omega C)$ [1п]. Импеданса паралелне везе отпорника и завојнице је $Z_{RL} = \frac{Z_R Z_L}{Z_R + Z_L} = \frac{i\omega L R}{i\omega L + R}$ [3п], а импеданса целог кола $Z = Z_{RL} + Z_C = \frac{\omega^2 L^2 R}{R^2 + (\omega L)^2} + i \left(\frac{\omega L R^2}{R^2 + (\omega L)^2} - \frac{1}{\omega C} \right)$ [3п], са апсолутном вредношћу $|Z| = \sqrt{\left(\frac{\omega^2 L^2 R}{R^2 + (\omega L)^2} \right)^2 + \left(\frac{\omega L R}{R^2 + (\omega L)^2} - \frac{1}{\omega C} \right)^2}$ [5п] и струјом $|i| = V \left[\left(\frac{\omega^2 L^2 R}{R^2 + (\omega L)^2} \right)^2 + \left(\frac{\omega L R}{R^2 + (\omega L)^2} - \frac{1}{\omega C} \right)^2 \right]^{-1/2}$ [3п]. Замена бројних вредности даје $|i| = 0,48 \text{ A}$ [3п]. У нискофреквентном лимиту струја не може тећи кроз кондензатор, $i_0 = 0$ [1п].
- Ако се осцилатор у тренутку $t = \tau$ налази у максимуму елонгације, онда ће тренутак $t = \tau + \frac{2\pi}{\omega}$ такође бити максимум елонгације, јер $x(t + \frac{2\pi}{\omega}) = e^{-\frac{2\gamma\pi}{\omega}} x(t)$. Аналогно, тренутак $t = \tau + \frac{\pi}{\omega}$ ће бити минимум, јер $x(t + \frac{\pi}{\omega}) = -e^{-\frac{\gamma\pi}{\omega}} x(t)$. Дакле, екстремуми дешавају са временским размацима од $\Delta t = \frac{\pi}{\omega}$ [3п]. Из једначине кретања апсолутна вредност елонгације у екстремуму је за фактор $\alpha = e^{-\frac{\gamma\pi}{\omega}}$ мања него у претходном екстремуму [5п]. Почетни екстремум је на координати x_0 . Зато су координате екстремума редом: $x_0, -\alpha x_0, \alpha^2 x_0, -\alpha^3 x_0, \alpha^4 x_0 \dots$ Укупан пређени пут је $s = x_0 + 2x_0\alpha + 2x_0\alpha^2 + 2x_0\alpha^3 + \dots$ [2п], јер за сваку вредност x_n осцилатор тај пут превази два пута (од 0 до x_n и од x_n до 0), изузев x_0 који се пређе само једном. Исписивањем суме, $s = x_0 (1 + 2\alpha \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n)$. Коришћењем помоћи из текста, $s = x_0 \left(1 + \frac{2\alpha}{1-\alpha} \right)$. Заменом израза за α , и сређивањем, $s = x_0 \left(1 + \frac{2}{e^{\gamma\pi/\omega} - 1} \right)$ [5п]. Лимит $\gamma/\omega \rightarrow 0$ даје $\alpha \rightarrow 1$, непригушене осцилације и бесконачан пређени пут [2п]. Лимит $\gamma/\omega \rightarrow \infty$ даје $\alpha \rightarrow 0$ и $s = x_0$, па се осцилатор само креће према равнотежном положају и не успева да заосцилује [3п].



Слика уз решење задатка 2.