



1. Палеоклиматологија проучава промене климе у прошлости. Температуру на Земљи у далекој прошлости палеоклиматолози могу да одреде, на пример, рачунајући однос изотопа O^{16} и O^{18} у ваздуху заробљеном у древним ледницима на Гренланду. У једном поступку за раздвајање ових изотопа из узорка, оба изотопа се након издвајања једноструко јонизују - уклони им се по један електрон наелектрисања e . Изотопи се затим, из стања мировања, убрзавају потенцијалном разликом U и потом улећу у магнетно поље, под правим углом у односу вектор магнетне индукције \vec{B} . Након пређене четвртине круга изотопи излећу из магнетног поља и настављају праволинијски да се крећу ка детектору честица који мери количину сваког изотопа. Масе изотопа O^{16} и O^{18} су m_{16} и m_{18} , редом.

(а) Показати да су изотопи у детектору раздвојени за $\Delta r = K(\sqrt{m_{18}} - \sqrt{m_{16}})$, где је $K = \sqrt{\frac{2U}{eB^2}}$.

(б) За које вредности напона U је растојање између изотопа у детектору веће од $\Delta r_1 = 4$ cm, ако је интензитет магнетне индукције $B = 0,06$ T? Елементарно наелектрисање је $e = 1,60 \cdot 10^{-19}$ C, а јединица атомске масе је $u = 1,66 \cdot 10^{-27}$ kg? (20 поена)

2. Поларне ледене капе садрже око $m = 2,3 \cdot 10^{19}$ kg леда. Ова маса незнатно доприноси моменту инерције Земље, јер се већина овог леда налази веома близу полова Земље, тј. веома близу осе ротације. Проценити за колико би се дужина дана променила, уколико би се сав лед поларних капа истопио и равномерно распоредио по површини Земље. Земљу сматрати хомогеном лоптом масе $M_z = 5,98 \cdot 10^{24}$ kg (без поларних капа). Момент инерције хомогене лопте масе M и полупречника R је $I = \frac{2}{5}MR^2$, а момент инерције сферне љуске масе M и полупречника R је $I = \frac{2}{3}MR^2$. (20 поена)

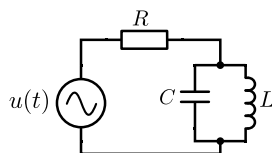
3. Касних 1880-их распламсао се "рат струја" између Николе Тесле и Томаса Едисона. Наиме, упркос постојању ефикаснијег Теслиног система који користи наизменичну струју, Едисон покреће систем преноса електричне енергије на даљину користећи једносмерну струју. Размотримо оба начина преноса електричне енергије на примеру једног америчког града из тог периода који је електричну енергију користио искључиво за осветљење. Како су коришћене сијалице са ужареним влакном, за њихово напајање је био потребан ниски напон од $U_1 = 100$ V. Граду је била потребна снага од $P = 10$ kW, која се преносила двојичним далеководима дужине $l = 2$ km, направљеним од бакра попречног пресека $S = 0,8$ cm² и специфичног отпора $\rho = 1,78 \cdot 10^{-8}$ Ω m.

(а) Услед непостојања ефикасног начина да се промени напон у колу једносмерне струје, Едисонов систем преноса електричне енергије подразумевао је да су напон преноса електричне енергије и напон који су потрошачи користили исти. Колики је однос снаге која се изгуби у далеководима при транспорту једносмерне електричне струје од електране до града и снаге која је потребна граду? Колику снагу треба да испоручи електрана у овом случају?

(б) Теслин систем преноса електричне енергије подразумева да се напон који производе генератори у електранама помоћу трансформатора повећава неколико хиљада пута тако да се струја високог напона U_2 преноси далеководима до потрошача, где постоји други трансформатор, који снижава напон на потребну вредност U_1 . Колико пута су мањи губици снаге у далеководима ако се електрична енергија преноси Теслиним системом при високом напону, ефективне вредности $U_2 = 10$ kV, у односу на губитке снаге када се преноси Едисоновим системом? Колику снагу у овом случају треба да испоручи електрана да би задовољила потребе града? Трансформаторе сматрати идеалним. (20 поена)

4. Електрично коло сачињено је од отпорника отпорности $R = 1$ k Ω , кондензатора капацитета $C = 160$ μ F, калема индуктивности $L = 1$ mH (видети слику) и наизменичног извора напона $u(t) = U_0 \sin(\omega t)$, при чему је $U_0 = 2$ V и $\omega = 5000$ $\frac{\text{rad}}{\text{s}}$. Колика ће бити амплитуда електричне струје која тече кроз отпорник? При којој вредности кружне фреквенције напона ω' кроз ово коло не тече електрична струја? (20 поена)

5. Штап масе m и полупречника R , постављен је на крајеве паралелних шина дужине a , које се налазе на растојању l . Овакав систем се налази у хомогеном магнетном пољу индукције B чији је правац нормалан на раван коју образују шине са штапом. Кроз штап пролази струја јачине I . Уколико се штап у почетном тренутку налази у стању мировања, колика ће бити његова брзина након што она дође до другог краја шина? Сматрати да се штап по шинама котрља без клизања. (20 поена)



Слика уз 4. задатак

Задатке припремили: **Владан Павловић**, Природно-математички факултет, Ниш

Владимир Велјић, Институт за физику, Београд

Марко Кузмановић, Universite Paris-Sud, France

Рецензент: **др Димитрије Степаненко**, Институт за физику, Београд

Председник Комисије за такмичења средњих школа: **др Божидар Николић**, Физички факултет, Београд



III разред

1. а) За изотоп који је из мировања убрзан потенцијалном разликом U важи $eU = \frac{1}{2}mv^2$ [5п], док за његово кретање по кружници полупречника r у магнетном пољу важи $evB = \frac{mv^2}{r}$ [5п]. Из претходних једначина се добија $r = \sqrt{\frac{2mU}{B^2e}} = K\sqrt{m}$ [2п], где је $K = \sqrt{\frac{2U}{eB^2}}$ [1п]. Дакле, изотопи су у детектору раздвојени за $\Delta r = K(\sqrt{m_{18}} - \sqrt{m_{16}})$ [2п].
- б) Растојање између изотопа у детектору веће је од Δr_1 , ако је $U > \frac{eB^2\Delta r_1^2}{2(\sqrt{m_{18}} - \sqrt{m_{16}})^2} = \frac{eB^2\Delta r_1^2}{2u(\sqrt{18} - \sqrt{16})^2} = 4715 \text{ V}$ [5п].
2. Пошто при топљењу леда, на Земљу не делује никакав момент силе, укупни момент импулса Земље, пре и после топљења леда остаје исти $\Delta L = L_2 - L_1 = 0$ [3п]. Момент импулса Земље пре топљења леда је $L_1 = (I_0 + I_L)\omega_1$ [3п], где је $I_0 = \frac{2}{5}M_zR_z^2$ [1п] момент инерције Земље без леда, а $I_L = 0$ момент инерције леда који је занемарљив. Момент импулса Земље након топљења леда је $L_2 = (I_0 + I_V)\omega_2$ [3п], где је $I_V = \frac{2}{3}mR_z^2$ [1п] момент инерције воде која је настала топљењем леда. Како је $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$ [1п] и $\omega_2 = \frac{2\pi}{T_2}$ [1п], промена дужина дана је $\Delta T = T_2 - T_1 = \frac{I_V}{I_0}T_1$ [2п]. Из претходних једначина се добија $\Delta T = \frac{5m}{3M_z}T_1 = 0,55 \text{ s}$ [5п].
3. а) Једносмерна електрична струја I која тече кроз далековод је $I = P/U_1$ [1п], а укупан отпор далековода је $R = 2\rho\frac{l}{S}$ [3п]. Далеководи су двојични па отуда фактор 2 (једном жицом електрична струја тече од електране до града, а другом од града до електране). Снага која се губи при транспорту је $P_g = I^2R = \frac{2P^2\rho l}{U_1^2S}$ [3п], одакле следи $\frac{P_g}{P} = \frac{2P\rho l}{U_1^2S} = 0,89$ [2п]. Електрана треба да испоручи снагу $P_e = P + P_g = P + 0,89P = 1,89P = 18,9 \text{ kW}$ [5п].
- б) Како је снага која се изгуби у далеководима пропорционална квадрату струје, то је $\frac{P_g}{P_g'} = \frac{U_1^2}{U_1'^2} = 10000$ [3п], где P_g' представља губитке у далеководима у Теслином систему преноса електричне енергије. Електрана у овом случају треба да испоручи снагу $P_e = P + P_g' = P + P_g/10000 = 1,0000089P \approx 10 \text{ kW}$ [3п], одакле је јасно да су губици у далеководима у Теслином систему преноса електричне енергије наизменичном струјом занемарљиви.
4. Импедансе кондензатора и калема су $Z_C = \frac{1}{i\omega C}$ [1п] и $Z_L = i\omega L$ [1п], редом, па је импеданса LC дела кола $Z_{LC} = \frac{Z_L Z_C}{Z_L + Z_C} = \frac{i\omega L}{1 - \omega^2 LC}$ [4п], а укупна импеданса кола је $Z = R + Z_{LC}$ [2п]. Амплитуда електричне струје која тече кроз коло је $I = \frac{U_0}{|Z|} = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \frac{\omega^2 L^2}{(1 - \omega^2 LC)^2}}} = 2 \text{ mA}$ [6п]. Кроз коло неће тећи струја ако је кружна фреквенција извора напона $\omega' = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 2500 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ [4п], јер је тада импеданса LC дела кола бесконачна [2п].
5. Укупни рад који се изврши над штапом услед деловања Амперове силе $F_A = IlB$ [2п] на штап износи $A = F_A a = IlBa$ [3п]. Овај рад се претвара у кинетичку енергију штапа, која се састоји из кинетичке енергије транслаторног и ротационог кретања $E_k = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$ [3п]. Како је момент инерције штапа једнак $I = \frac{1}{2}mR^2$ [2п], а услов неклизања $\omega = \frac{v}{R}$ [2п], укупна кинетичка енергија износи $E_k = \frac{3}{4}mv^2$ [3п]. Након изједначавања извршеног рада и промене кинетичке енергије $E_k = A$ [2п], за коначну брзину се добија $v = \sqrt{\frac{4IlBa}{3m}}$ [3п].

У свим задацима у коначном резултату тачна бројна вредност доноси [2п] и тачна јединица [1п].

Задатке припремили: *Владан Павловић*, Природно-математички факултет, Ниш

Владимир Велјић, Институт за физику, Београд

Марко Кузмановић, Universite Paris-Sud, France

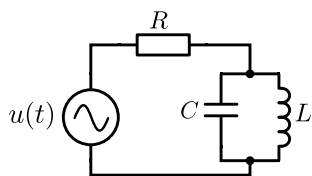
Рецензент: *др Димитрије Степаненко*, Институт за физику, Београд

Председник Комисије за такмичења средњих школа: *др Божидар Николић*, Физички факултет, Београд

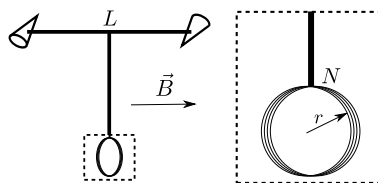


III разред

- Две звезде једнаких маса ротирају око заједничког центра масе. Планетоид, чија је маса много мања од маса звезда, осцилује дуж осе која пролази кроз центар масе звезда и нормална је на раван којој припада орбита звезда. Амплитуда осциловања планетоида је много мања од растојања између звезда. Колики је однос периода ротације звезда T_1 и периода осциловања планетоида T_2 ? Занемарити гравитациони утицај осталих небеских тела на звезде и планетоид, као и утицај планетоида на орбите звезда. *Помоћ:* $(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$ за $x \ll 1$. (20 поена)
- Поларне ледене капе садрже око $m = 2,3 \cdot 10^{19}$ kg леда. Ова маса незнатно доприноси моменту инерције Земље, јер се већина овог леда налази веома близу полова Земље, тј. веома близу осе ротације. Проценити за колико би се дужина дана променила, уколико би се сав лед поларних капа истопио и равномерно распоредио по површини Земље. Земљу сматрати хомогеном лоптом масе $M_z = 5,98 \cdot 10^{24}$ kg (без поларних капа). Момент инерције хомогене лопте масе M и полупречника R је $I = \frac{2}{5}MR^2$, а момент инерције сферне љуске масе M и полупречника R је $I = \frac{2}{3}MR^2$. (20 поена)
- Касних 1880-их распламсао се "рат струја" између Николе Тесле и Томаса Едисона. Наиме, упркос постојању ефикаснијег Теслиног система који користи наизменичну струју, Едисон покреће систем преноса електричне енергије на даљину користећи једносмерну струју. Размотримо оба начина преноса електричне енергије на примеру једног америчког града из тог периода који је електричну енергију користио искључиво за осветљење. Како су коришћене сијалице са ужареним влакном, за њихово напајање је био потребан ниски напон од $U_1 = 100$ V. Граду је била потребна снага од $P = 10$ kW, која се преносила двојичним далеководима дужине $l = 2$ km, направљеним од бакра попречног пресека $S = 0,8$ cm² и специфичног отпора $\rho = 1,78 \cdot 10^{-8}$ Ωm.
 - Услед непостојања ефикасног начина да се промени напон у колу једносмерне струје, Едисонов систем преноса електричне енергије подразумевао је да су напон преноса електричне енергије и напон који су потрошачи користили исти. Колики је однос снаге која се изгуби у далеководима при транспорту једносмерне електричне струје од електране до града и снаге која је потребна граду? Колику снагу треба да испоручи електрана у овом случају?
 - Теслин систем преноса електричне енергије подразумева да се напон који производе генератори у електранама помоћу трансформатора повећава неколико хиљада пута тако да се струја високог напона U_2 преноси далеководима до потрошача, где постоји други трансформатор, који снижава напон на потребну вредност U_1 . Колико пута су мањи губици снаге у далеководима ако се електрична енергија преноси Теслиним системом при високом напону, ефективне вредности $U_2 = 10$ kV, у односу на губитке снаге када се преноси Едисоновим системом? Колику снагу у овом случају треба да испоручи електрана да би задовољила потребе града? Трансформаторе сматрати идеалним. (20 поена)
- Генератор наизменичног сигнала везан је у коло зарезног филтера, који зауставља део сигнала одређених фреквенција у колу наизменичне струје. Коло је сачињено од отпорника отпорности $R = 1$ kΩ, кондензатора капацитета $C = 160$ μF и калема индуктивности $L = 1$ mH (видети слику). Ако је временска зависност напона на генератору дата са $u(t) = 2U_0 \cos(at) \sin(bt)$, где $U_0 = 2$ V, $a = 1250$ rad/s и $b = 3750$ rad/s, колика ће бити кружна фреквенција и амплитуда електричне струје која тече кроз отпорник? (20 поена)
- Анемометар, уређај за мерење брзине ветра, састоји се од два конусна дела која су причвршћена на крајевима хоризонталне шипке дужине $L = 0,5$ m (видети слику). Шипка је повезана са вертикалном непроводном осовином која може да ротира, која је на другом крају повезана са проводном вертикалном жицом савијеном $N = 200$ пута у круг полупречника $r = 15$ cm. Магнетно поље Земље делује у хоризонталном правцу, а интезитет његове магнетне индукције је $B = 10^{-5}$ T. Колики је интензитет брзине ветра, ако је максимални индуковани напон $\varepsilon_0 = 5$ mV. Сматрати да је брзина ветра константна и да интензитет брзине конусних делова представља $\eta = 90\%$ интензитета брзине ветра. *Помоћ:* $\cos \alpha \Delta x \approx 1$ и $\frac{\sin \alpha \Delta x}{\Delta x} \approx \alpha$ за $\Delta x \ll 1$. (20 поена)



Слика уз 4. задатак



Слика уз 5. задатак

Задатке припремили: **Владан Павловић**, Природно-математички факултет, Ниш

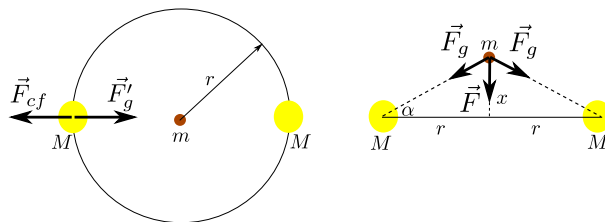
Владимир Велић, Институт за физику, Београд

Марко Кузмановић, Universite Paris-Sud, France

Рецензент: **др Димитрије Степаненко**, Институт за физику, Београд

Председник Комисије за такмичења средњих школа: **др Божидар Николић**, Физички факултет, Београд

1. Нека је маса сваке звезде M , а растојање између звезда $2r$. Звезде ротирају по кругу полупречника r **1п**, при чему важи $F_g = F_{cf}$, тј. $\gamma \frac{M^2}{(2r)^2} = M\omega_1^2 r$ **4п**, одакле се за период ротације звезда добија $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = 4\pi \sqrt{\frac{r^3}{\gamma M}}$ **2п**. Када је планетоид масе m на растојању x од равни којој припада орбита звезда на њега делује сила интензитета $F = 2F_g \sin \alpha = 2\gamma \frac{mM}{(r^2+x^2)} \frac{x}{\sqrt{r^2+x^2}}$ **6п** у смеру ка тој равни. На основу II Њутновог закона и узимајући у обзир да је $x \ll r$ важи $ma = -2\gamma mM \frac{x}{r^3}$ **2п**, што представља једначину кретања ЛХО са угаonom фреквенцијом $\omega_2^2 = \frac{2\gamma M}{r^3}$ **2п**. Дакле, период осциловања планетоида је $T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{2\gamma M}}$ **1п**, одакле је $\frac{T_1}{T_2} = 2\sqrt{2}$ **2п**.



Слика уз решење 1. задатка

2. Пошто при топљењу леда, на Земљу не делује никакав момент силе, укупни момент импулса Земље, пре и после топљења леда остаје исти $\Delta L = L_2 - L_1 = 0$ **3п**. Момент импулса Земље пре топљења леда је $L_1 = (I_0 + I_L)\omega_1$ **3п**, где је $I_0 = \frac{2}{5}M_z R_z^2$ **1п** момент инерције Земље без леда, а $I_L = 0$ момент инерције леда који је занемарљив. Момент импулса Земље након топљења леда је $L_2 = (I_0 + I_V)\omega_2$ **3п**, где је $I_V = \frac{2}{3}mR_z^2$ **1п** момент инерције воде која је настала топљењем леда. Како је $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$ **1п** и $\omega_2 = \frac{2\pi}{T_2}$ **1п**, промена дужина дана је $\Delta T = T_2 - T_1 = \frac{I_V}{I_0} T_1$ **2п**. Из претходних једначина се добија $\Delta T = \frac{5m}{3M_z} T_1 = 0,55 \text{ s}$ **5п**.
3. а) Једносмерна електрична струја I која тече кроз далековод је $I = P/U_1$ **1п**, а укупан отпор далековода је $R = 2\rho \frac{l}{S}$ **3п**. Далеководи су двожицни па отуда фактор 2 (једном жицом електрична струја тече од електране до града, а другом од града до електране). Снага која се губи при транспорту је $P_g = I^2 R = \frac{2P^2 \rho l}{U_1^2 S}$ **3п**, одакле следи $\frac{P_g}{P} = \frac{2P\rho l}{U_1^2 S} = 0,89$ **2п**. Електрана треба да испоручи снагу $P_e = P + P_g = P + 0,89P = 1,89P = 18,9 \text{ kW}$ **5п**.
- б) Како је снага која се изгуби у далеководима пропорционална квадрату струје, то је $\frac{P_g}{P'_g} = \frac{U_2^2}{U_1^2} = 10000$ **3п**, где P'_g представља губитке у далеководима у Теслином систему преноса електричне енергије. Електрана у овом случају треба да испоручи снагу $P_e = P + P'_g = P + P_g/10000 = 1,0000089P \approx 10 \text{ kW}$ **3п**, одакле је јасно да су губици у далеководима у Теслином систему преноса електричне енергије наизменичном струјом занемарљиви.
4. Дати напон се може представити као збир два синусна напонска сигнала $u(t) = U_0 \sin \omega_1 t + U_0 \sin \omega_2 t$ **3п**, једнаких амплитуда $U_0 = 2\text{V}$ и кружних фреквенција $\omega_1 = a + b = 5000 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ **2п** и $\omega_2 = a - b = 2500 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ **2п**. Импедансе кондензатора и калема су редом $Z_C = \frac{1}{i\omega C}$ и $Z_L = i\omega L$, па је импеданса LC дела кола $Z_{LC} = \frac{Z_L Z_C}{Z_L + Z_C} = \frac{i\omega L}{1 - \omega^2 LC}$ **3п**, а укупна импеданса кола је $Z = R + Z_{LC}$ **1п**. Заменом бројних вредности добија се да је укупна импеданса кола за кружну фреквенцију ω_2 бесконачна **2п**, док је за кружну фреквенцију ω_1 укупна импеданса коначна **2п**, што значи да ће кроз коло тећи само струја кружне учестаности ω_1 **2п**. Амплитуда те струје је $I = \frac{U_0}{|Z|} = 2\text{mA}$ **3п**.
5. Нека је интензитет брзине ветра v , тада се конуси обрћу брзином интензитета ηv **2п**, па се вертикална осовина окреће константном угаonom брзином $\omega = \frac{2\eta v}{L}$ **2п**. Електромоторна сила која се индукује у соленоиду од жице је по Фарадејвом закону $\varepsilon = -\frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = -\frac{\Phi(t+\Delta t) - \Phi(t)}{\Delta t} = -NBr^2 \pi \frac{\cos(\omega(t+\Delta t)+\varphi) - \cos(\omega t + \varphi)}{\Delta t} = NBr^2 \pi \omega \sin(\omega t + \varphi)$ **10п**. Из последње једначине следи $\varepsilon_0 = NBr^2 \pi \omega$ **2п**, одакле се за интензитет брзине ветра добија $v = \frac{L\varepsilon_0}{2NBr^2 \pi \eta} = 9,82 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ **4п**.

У свим задацима у коначном резултату тачна бројна вредност доноси **2п** и тачна јединица **1п**.