51. ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ ФИЗИКЕ
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

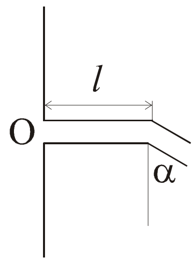
Друштво Физичара Србије
Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Републике Србије
ЗАДАЦИ – бозонска категорија

II РАЗРЕД

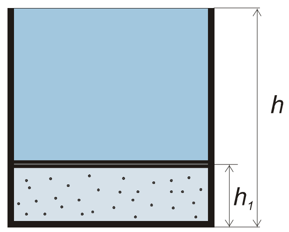
БЕОГРАД
13-14.04.2013.

1. Машина за испуцавање тениских лоптица избацује по једну лоптицу масе m на сваке $\mathrm{t=2s}$. Ка машини се по хоризонталној подлози крећу колица масе M за прикупљање лоптица почетном брзином $v_0 = 0,5\mathrm{m/s}$. Ако свака лоптица у колица улеће хоризонтално брзином $v = 40v_0$ и маса колица M је 1000 пута већа од масе лоптице: а) израчунати колико је лоптица n потребно да уђе у колица да би се иста зауставила; б) извести општи израз за заједничку брзину којом се после судара креће систем колица+лоптица у функцији v_0 ; ц) колики пут колица пређу до заустављања? Трење између колица и подлоге занемарити. Збир првих k природних бројева је: $1+2+\ldots+k-1+k \approx k(k+1)/2$ **(20п)**

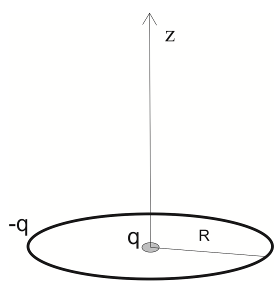
2. Вода истиче из неког великог резервоара кроз хоризонталну цев која је на крају савијена под углом $\alpha=5^{\circ}$ у односу на вертикалан правац (види слику). Полупречник цеви је свуда исти и износи $r = 1\mathrm{cm}$ а дужина хоризонталног дела цеви је $l = 20\mathrm{cm}$. Запремински проток воде износи $Q = 0,1\mathrm{l/s}$. Извести општи израз и израчунати бројну вредност интензитета момента силе реакције воде на зидове цеви у односу на тачку О узрокован истицањем воде. За мале углове важи: $\cos x \approx 1 - x^2/2$. **(20 п)**



3. У топлотно изолованој цилиндричној посуди висине h и површине попречног пресека S , на висини h_1, налази се покретни лагани клип занемарљиве дебљине. Изнад клипа (до врха посуде) се налази вода а испод клипа ваздух који се греје, услед чега клип почиње да се креће навише истискујући при том воду из посуде. У току процеса загревања, веза између притиска и запремине је линеарна. Ако је почетна температура ваздуха T_1, наћи рад који изврши гас над околином , промену унутрашње енергије гаса као и општи израз за количину топлоте коју треба предати гасу да би клип истиснуо сву количину воде из посуде. Ваздух сматрати идеалним гасом. Познате су моларна маса гаса M , специфична топлотна капацитативност гаса c_v, густина воде ρ_{H_2O} и атмосферски притисак p_a. **(15 п)**



4. Тачкасто наелектрисање q налази се у центру танког прстена радијуса R, по којем је равномерно распоређено наелектрисање $-q$. Наћи интензитет вектора јачине електричног поља на оси прстена у тачки која је на растојању z од његовог центра, ако је $z \gg R$. За малу величину x важи $(1+x)^{\alpha} \approx 1+\alpha x$. **(20 п)**



5. а) Два тима студената, група А и група Б, урадила су експеримент којим су измерили топлотне капацитативности једног мола једноатомског гаса са инструментима и експерименталном поставком коју су сами направили. Добили су резултате који су приказани у Табелама 1 и 2. Пажљивом анализом експерименталних резултата утврдите чији је експеримент тачнији, а чији прецизнији. Познато је да су табличне вредности за једноатомске гасове $C_p = (5/2)R$ и $C_V = (3/2)R$, где је вредност $R = 8,32\ \mathrm{J/(molK)}$. Таблична вредност коефицијента адијабате за исти гас износи $\gamma = 5/3$.

Табела 1. Експериментални резултати групе А.	
C_p [J/(mol K)]	C_V [J/(mol K)]
22,31	13,99
22,30	13,98
22,29	13,97
22,30	13,98
22,31	13,99
22,29	13,97

Табела 2. Експериментални резултати групе Б.	
C_p [J/(mol K)]	C_V [J/(mol K)]
72,83	43,71
72,80	43,68
72,76	43,64
72,80	43,68
72,83	43,71
72,76	43,64

(15 п)

б) У експерименту који за циљ има одређивање односа специфичних топлотних капацитативности гаса при сталном притиску и сталној запремини c_p / c_v, један мол идеалног једноатомског гаса греје се помоћу струје која тече кроз отпорну жицу од платине. У почетном тренутку, гас се може описати параметрима T_1, p_1, V_1. Гас се у првом случају греје при сталној запремини V_1, при чему се притисак мења од p_1 до p_2. У другом случају гас се греје при сталном притиску p_1 при чему се запремина мења од V_1 до V_2. У оба случаја количине топлоте које се доводе гасу су једнаке. Извести зависност c_p / c_v од параметара гаса p_1, p_2, V_1, V_2. Ако су резултати експеримента приказани у табели:

V_2 / V_1	1,57	1,62	1,69	1,82	1,96
p_2 / p_1	1,9	2,04	2,17	2,39	2,59

, извршити одговарајућу линеаризацију и графичким путем одредити вредност c_p / c_v, као и одговарајућу грешку. Релативне грешке мерења притиска и запремине су једнаке и износе $\Delta p_1 / p_1 = \Delta p_2 / p_2 = \Delta V_1 / V_1 = \Delta V_2 / V_2 = 1\%$. **(10 п)**

* * * * * * * * * *

ПОМОЋ

Неке основне тригонометријске једнакости и формуле:				
$\sin 0° = 0$	$\sin 30° = 1/2$	$\sin 45° = \sqrt{2}/2$	$\sin 60° = \sqrt{3}/2$	$\sin 90° = 1$
$\cos 0° = 1$	$\cos 30° = \sqrt{3}/2$	$\cos 45° = \sqrt{2}/2$	$\cos 60° = 1/2$	$\cos 90° = 0$
$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$		$\sin^2(\alpha/2) = (1-\cos\alpha)/2$		
$\sin\alpha = 1/\sqrt{1+\mathrm{ctg}^2\alpha}$		$\cos^2(\alpha/2) = (1+\cos\alpha)/2$		
$\cos\alpha = 1/\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}$		$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$		
$\mathrm{tg}\, 2\alpha = 2\mathrm{tg}\alpha/(1-\mathrm{tg}^2\alpha)$		$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$		
$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$		$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$		

Задатке припремили:
др Сања Тошић,
Институт за физику, Београд
др Бојан Николић,
Институт за физику, Београд

Рецензент: *др Драган Д. Маркушев,*
Институт за физику, Београд
Председник Комисије за такмичења ученика средњих школаДФС:*др Александар Крмпот,*
Институт за физику, Београд

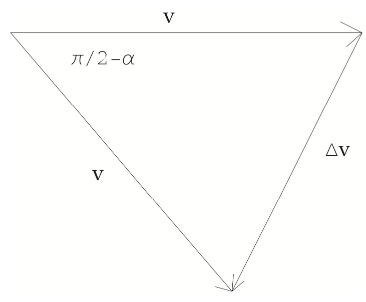
II РАЗРЕД
Бозони

Друштво Физичара Србије
Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Републике Србије
РЕШЕЊА ЗАДАТАКА – бозонска категорија

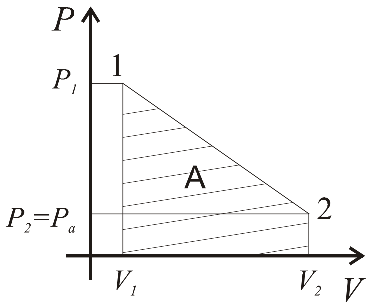
БЕОГРАД
13-14.04.2013.

Р1. а) Свака лоптица после уласка у колица наставља да се креће заједно с њима па процес можемо сматрати нееластичним сударом. Ако се после n лоптица колица заустављају, закон одржања импулса за сваки сударни процес (од првог до n-тог) даје следеће ј-не: $Mv_0 - mv = (M+m)v_1$, $(M+m)v_1 - mv = (M+m+m)v_2 \ldots (M+(n-2)m)v_{n-2} - mv = (M+(n-1)m)v_{n-1}$, $(M+(n-1)m)v_{n-1} - mv = 0$ **(3п)**. Сабирањем свих ових једначина добијамо: $Mv_0 - nmv = 0$ **(1п)**, одакле је: $\boxed{n = Mv_0/(mv) = 25}$ **(1п)** б) Из закона одржања импулса добијамо редом заједничке брзине кретања система после првог, другог... $n-1$-ог судара (после n-тог судара та брзина је једнака нули): $v_1 = (Mv_0 - mv)/(M+m) = (1000v_0 - v)/1001$,
$v_2 = ((M+m)v_1 - mv)/(M+2m) = (Mv_0 - 2mv)/(M+2m) = (1000v_0 - 2v)/1002 \ldots$
$v_k = (Mv_0 - kmv)/(M+km) = (1000v_0 - kv)/(1000+k)$ **(3п)**, тј $\boxed{v_k = v_0(1000-40k)/(1000+k)}$ **(2п)**, за $k = 1,2,3 \ldots n-1 = 1,2,3 \ldots 24$ ц) Време између два судара t_k добијамо из: $vt = (v_k + v)t_k$ **(1п)**, где је vt растојање између колица и куглице пре сваког судара. Сада је: $t_k = vt/(v_k + v)$ **(1п)**. За то време колица пређу пут: $s_k = v_k t_k = v_k vt/(v_k+v)$ **(2п)**. Заменом израза за v_k и сређивањем добијамо: $s_k = (Mv_0 - kmv)vt/\left[M(v_0+v)\right] = (8/205)(25-k)$ **(2п)**. Укупни пређени пут s добијамо сабирањем свих s_k ($k = 1,2 \ldots 24$): $s = \sum_{k=1}^{24} s_k = \sum_{k=1}^{24} (8/205)(25-k)$ **(2п)**. С обиром да за збир првих k природних бројева важи: $1+2+\ldots+k-1+k = k(k+1)/2$, коначно добијамо да је $\boxed{s_k = (8/205)\cdot 24 \cdot 25/2 = 11.7\text{m}}$ **(2п)**.

Р2. Посматрајмо делић воде масе $\Delta m = \rho \Delta V$ **(2п)**. Интензитет силе која делује на њега је по другом Њутновом закону: $F = \Delta m \Delta v/\Delta t = \rho \Delta V \Delta v/\Delta t$ **(2п)**. Сила се јавља као резултат промене правца брзине, док је интензитет непосредно пре и после скретања исти. Како је запремински проток по дефиницији: $Q = \Delta V/\Delta t$ **(1п)** , то израз за силу добија следећи облик: $F = \rho Q \Delta v$ **(2п)**. Интензитет промене брзине воде налазимо из ромба чије су странице v и оштар угао $\pi/2 - \alpha$, $\Delta v = 2v \sin(\pi/4 - \alpha/2)$ **(3п)**, где је v брзина воде кроз цев и износи: $v = Q/(r^2\pi)$ **(2п)**. Коначно, интензитет силе је: $F = 2\rho Q^2 \sin(\pi/4 - \alpha/2)/(r^2\pi)$ **(2п)**. Интензитет момента силе је: $M = Fl\cos(\pi/4 - \alpha/2) = \rho Q^2 l \cos\alpha/(r^2\pi)$ **(4п)**. За задате бројне вредности, уз апроксимацију да је угао α мали, интензитет момента силе је: $\boxed{M \approx 0{,}006\text{Nm}}$ **(2п)**.



Р3. У почетном тренутку, гас се налази под притиском: $p_1 = p_a + m_{H_2O} g/S$ **(1п)**. Масу воде добијамо као: $m_{H_2O} = \rho_{H_2O} V_{H_2O} = \rho_{H_2O}(V_c - V_1) = \rho_{H_2O} S(h - h_1)$ **(1п)** где су V_c и V_1 запремина цилиндра и почетна запремина коју заузима гас. Заменом у прву једначину добијамо: $p_1 = p_a + \rho_{H_2O} g(h - h_1)$ **(1п)**. Када клип истисне воду из цилиндра, параметри гаса су: $p_2 = p_a$ и $V_2 = V_c = Sh$ **(1п)**. Током процеса не мења се



количина гаса: $p_1V_1/T_1 = p_2V_2/T_2$ па је коначна температура: $T_2 = T_1p_2V_2/(p_1V_1)$ **(1п)**, тј. $T_2 = T_1p_ah/\left[p_a + \rho_{H_2O}g(h-h_1)\right]h_1$ **(1п)**. Рад можемо наћи помоћу $p-V$ дијаграма (површина испод графика): $A = (p_1+p_2)(V_2-V_1)/2 = (p_1+p_2)S(h-h_1)/2$ **(1п)**

што срећивањем даје: $\boxed{A = \left[2p_a + \rho_{H_2O}g(h-h_1)\right]S(h-h_1)/2}$ **(2п)**.

Количина топлоте која се предаје гасу је: $Q = \Delta U + A$ **(1п)**. Промена унутрашње енерије гаса је: $\Delta U = mc_v(T_2-T_1)$ **(1п)**. Масу ваздуха можемо добити из једначине стања: $p_1V_1 = mRT_1/M$, $m = p_1V_1M/RT_1 = p_1Sh_1M/RT_1 = \left[p_a + \rho_{H_2O}g(h-h_1)\right]Sh_1M/RT_1$ **(1п)**. Промена унутрашње енергије гаса је сада: $\boxed{\Delta U = SMc_v(h-h_1)(p_a - \rho_{H_2O}gh_1)/R}$ **(2п)**. Коначно, заменом у израз за количину топлоте добијамо: $\boxed{Q = S(h-h_1)\left[p_a(Mc_v/R+1) + \rho_{H_2O}g((h-h_1)/2 - h_1Mc_v/R\right]}$ **(1п)**.

Р4. Поставимо координатни систем, тако да је координатни почетак у центру прстена а z оса се поклапа са осом симетрије прстена. Вектор јачине електричног поља једнак је збиру вектора јачине поља тачкастог наелектрисања и прстена. Вектор јачине поља тачкастог наелектрисања је: $\vec{E_1} = q\vec{e_z}/(4\pi\varepsilon_0z^2)$ **(3п)**. С друге стране, вектор јачине електричног поља прстена је облика $\vec{E_2} = \sum_i \vec{E_2^i}$ **(3п)**, где је $\vec{E_2^i}$ јачина поља i-тог делића који носи наелектрисање $-q\Delta l_i/(2\pi R)$ **(3п)**. Пошто се сваки делић налази на растојању $\sqrt{R^2+z^2}$ од тачке у којој тражимо јачину електричног поља, сабирањем доприноса свих делића добијамо: $\vec{E_2} = -q\cos\alpha\vec{e_z}/\left[4\pi\varepsilon_0(R^2+z^2)\right]$ **(3п)**, где је $\cos\alpha = z/\sqrt{R^2+z^2}$ **(3п)**. Због симетрије, радијалана компонента, која постоји за сваки делић, приликом сумирања се анулира. Одавде следи да је вектор јачине електричног поља у датој тачки једнак: $\boxed{\vec{E} = \vec{E_1} + \vec{E_2} = \left[q/(4\pi\varepsilon_0z^2) - qz/\left[4\pi\varepsilon_0(R^2+z^2)^{3/2}\right]\right]\vec{e_z} \approx 3qR^2\vec{e_z}/(8\pi\varepsilon_0z^4)}$ **(5п)**.

Р5. а) Ако се зна да је $C_p - C_V = R$ и $\gamma = C_p/C_V$, пажљивом анализом резултата из Табеле 1 очигледно је да се могу добити табличне вредности само за $R = 8{,}32\ \mathrm{J/(molK)}$, а не и за γ (види Табелу 3). То указује на чињеницу да је група А имала грешку мерења, чија је природа таква да увећава све резултате мерења за неку вредност $\alpha = 1{,}5\ \mathrm{J/(mol\,K)}$, тј. $C_p = C'_p + \alpha$ и $C_V = C'_V + \alpha$, где су C'_p и C'_V кориговане вредности експеримента. Пошто α представља систематско одступање, тј. одступање у истом смислу (величина и знак одступања јесу исти у свим мерењима), грешка мерења групе А јесте систематска грешка**(1п)**. Таква грешка омогућава корекцију експерименталних резултата, и они су приказани, кроз C'_p и C'_V, у Табели 3.

Табела 3. Анализа експерименталних резултата групе А.

$R = C_p - C_V$ [J/(molK)]	$\gamma = C_p / C_V$ [J/(molK)]	α [J/(molK)]	$C'_p = C_p - \alpha$ [J/(molK)]	$C'_V = C_V - \alpha$ [J/(molK)]
8,32	1,59	1,5	20,81	12,49
8,32	1,59	1,5	20,80	12,48
8,32	1,60	1,5	20,79	12,47
8,32	1,59	1,5	20,80	12,48
8,32	1,59	1,5	20,81	12,49
8,32	1,58	1,5	20,79	12,47
8,32	1,59	1,5	20,81	12,49

(2п).

Када се израчунају средње вредности коригованих резултата, добија се да су $\left\langle C'_p \right\rangle = 20,80\ \mathrm{J/(mol\ K)}$ и $\left\langle C'_V \right\rangle = 12,48\ \mathrm{J/(mol\ K)}$ **(1п)**. Апсолутна грешка коригованих вредности (као максимално одступање од средњих вредности) износи $\Delta\left\langle C'_p \right\rangle = \Delta\left\langle C'_V \right\rangle = 0,01\ \mathrm{J/(mol\ K)}$ **(1п)**. Коначни резултати анализе резултата из Табеле 1 дају вредности $\left\langle C'_p \right\rangle = (20,80 \pm 0,01)\ \mathrm{J/(mol\ K)}$ и $\left\langle C'_V \right\rangle = (12,48 \pm 0,01)\ \mathrm{J/(mol\ K)}$ **(1п)**, што се у потпуности слаже са датим табличним вредностима за $C_p = 20,80\ \mathrm{J/(mol\ K)}$ и $C_V = 12,48\ \mathrm{J/(mol\ K)}$. Поклапање средњих вредности мерења са датом табличном вредношћу говори о томе да су мерења ***тачна***, а мала одступања у виду апсолутне грешке говоре о томе да су мерења ***прецизна*** **(1п)** . Релативне грешке су $\Delta\left\langle C'_p \right\rangle / \left\langle C'_p \right\rangle = 5 \cdot 10^{-4} = 0,5\%$ и $\Delta\left\langle C'_V \right\rangle / \left\langle C'_V \right\rangle = 8 \cdot 10^{-4} = 0,8\%$ **(1п)**.

Пажљивом анализом резултата из Табеле 2 очигледно је да се могу добити табличне вредности за $\gamma = 1,67$, а не и за R (види Табелу 4). То указује на чињеницу да је група Б имала грешку мерења, чија је природа таква да множи све резултате мерења за неку вредност $\beta = 3,5$, тј. $C_p = \beta C'_p$ и $C_V = \beta C'_V$,где су C'_p и C'_V кориговане вредности експеримента. Пошто β представља систематско одступање, тј. одступање у истом смислу (величина и знак одступања јесу исти у свим мерењима), грешка мерења групе Б јесте систематска грешка **(1п)**. Таква грешка омогућава корекцију експерименталних резултата, и они су приказани, кроз C'_p и C'_V, у Табели 4.

Табела 4. Анализа експерименталних резултата групе Б.

$R = C_p - C_V$ [J/(molK)]	$\gamma = C_p / C_V$ [J/(molK)]	β	$C'_p = C_p / \beta$ [J/(molK)]	$C'_V = C_V / \beta$ [J/(molK)]
29,12	1,67	3,5	20,81	12,49
29,12	1,67	3,5	20,80	12,48
29,12	1,67	3,5	20,79	12,47
29,12	1,67	3,5	20,80	12,48
29,12	1,67	3,5	20,81	12,49
29,12	1,67	3,5	20,79	12,47
29,12	1,67	3,5	20,81	12,49

(2п).

Као и у претходном случају, добијају се идентичне вредности мерених величина: $\left\langle C'_p \right\rangle = (20,80 \pm 0,01)\ \mathrm{J/(mol\ K)}$ и $\left\langle C'_V \right\rangle = (12,48 \pm 0,01)\ \mathrm{J/(mol\ K)}$ **(2п)**, са релативним грешкама $\Delta\left\langle C'_p \right\rangle / \left\langle C'_p \right\rangle = 5 \cdot 10^{-4} = 0,5\%$ и $\Delta\left\langle C'_V \right\rangle / \left\langle C'_V \right\rangle = 8 \cdot 10^{-4} = 0,8\%$ **(1п)**.

Према добијеним резултатима експерименти који су урађени од стране група А и Б имају ***исту тачност*** и ***исту прецизност*** **(1п).**

б) Количина топлоте која се пренесе у првом процесу ($V_1 = const$) при загревању гаса од T_1 до T_2 је: $Q_v = c_v m(T_2 - T_1)$ **(0,25п)**. Из једначина стања: $p_1 V_1 = nRT_1$ и $p_2 V_1 = nRT_2$ следи да је $T_2 - T_1 = V_1(p_2 - p_1)/(nR)$ **(0,25п)**. Заменом у израз за количину топлоте добијамо: $Q_v = c_v m V_1(p_2 - p_1)/(nR)$ **(0,25п)**. Аналогно добијамо да је количина топлоте која се пренесе у другом процесу ($p_1 = const$) при загревању гаса од T_1 до T_2: $Q_p = c_p m(T_2 - T_1)$ **(0,25п)**. Из једначина стања: $p_1 V_1 = nRT_1$ и $p_1 V_2 = nRT_2$ следи да је $T_2 - T_1 = p_1(V_2 - V_1)/(nR)$ **(0,25п)**, па је $Q_p = c_p m p_1(V_2 - V_1)/(nR)$ **(0,25п)**. Изједначавањем $Q_v = Q_p$ и сређивањем добијамо да је: $c_p / c_v = (p_2/p_1 - 1)/(V_2/V_1 - 1)$ **(1п)**.

Увођењем смене $x = V_2/V_1 - 1$ и $y = p_2/p_1 - 1$ **(0,5п)**, израз постаје $y = (c_p/c_v)x$, тј $y = kx$ **(0,5п)**, где је k коефицијент правца. На основу дате табеле у поставци и услова задатка да је $\Delta p_1/p_1 = \Delta p_2/p_2 = \Delta V_1/V_1 = \Delta V_2/V_2 = 1\%$, график цртамо на основу табеле:

$V_2/V_1 - 1$	$0{,}57 \pm 0{,}03$	$0{,}62 \pm 0{,}03$	$0{,}69 \pm 0{,}03$	$0{,}82 \pm 0{,}04$	$0{,}96 \pm 0{,}04$
$p_2/p_1 - 1$	$0{,}92 \pm 0{,}04$	$1{,}04 \pm 0{,}04$	$1{,}17 \pm 0{,}04$	$1{,}39 \pm 0{,}05$	$1{,}59 \pm 0{,}05$

(2п)

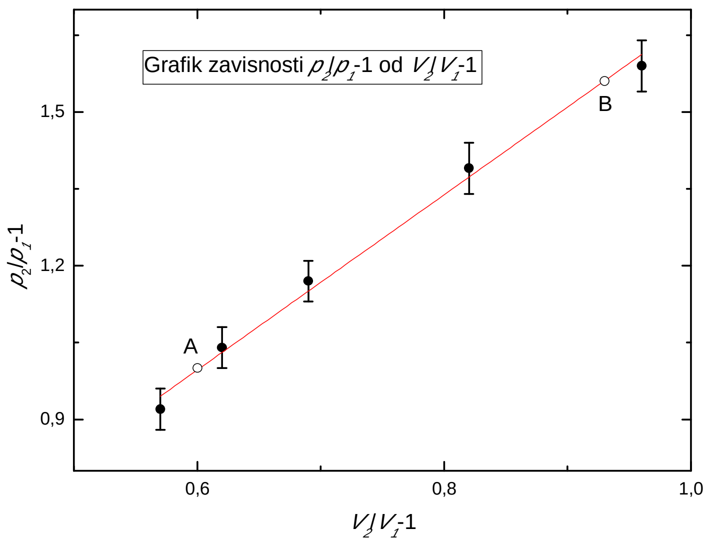
где су одговарајуће грешке добијене као: $\Delta(p_2/p_1 - 1) = (p_2/p_1)(\Delta p_1/p_1 + \Delta p_2/p_2)$ и $\Delta(V_2/V_1 - 1) = (V_2/V_1)(\Delta V_1/V_1 + \Delta V_2/V_2)$ **(0,5п)**.

Са графика узимамо две тачке, једну између прве две A(0,6;1) и другу између последње две експерименталне тачке B(0,93;1,55) **(1п)**. Коефицијент правца рачунамо као: $k = (x_B - x_A)/(y_B - y_A) = (1{,}55 - 1)/(0{,}93 - 0{,}6) = 1{,}666$ **(0,5п)**. Одговарајућа грешка је:

$$\Delta k = k\left[(\Delta y_B + \Delta y_A)/(y_B - y_A) + (\Delta x_B + \Delta x_A)/(x_B - x_A)\right]$$

$$\Delta k = 1{,}666\left[(0{,}05 + 0{,}03)/(1{,}55 - 1) + (0{,}04 + 0{,}04)/(0{,}93 - 0.6)\right] = 0{,}646 \approx 0{,}6$$ **(0,5п)**

С обзиром да је $c_p / c_v = k$, следи да је $\Delta(c_p/c_v) = \Delta k$, па је коначно $\boxed{c_p / c_v = (1{,}7 \pm 0{,}6)}$. **(1п)**



(1п)

51. ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ ФИЗИКЕ
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

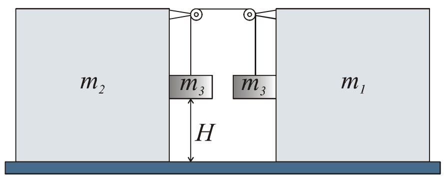
II РАЗРЕД

Друштво Физичара Србије
Министарство просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије

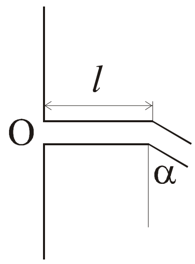
БЕОГРАД
13-14.04.2013.

ЗАДАЦИ – фермионска категорија

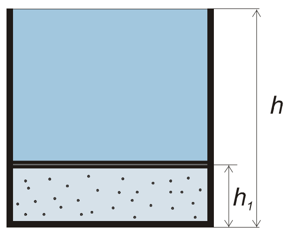
1. Систем чине две коцке маса m_1 и m_2 и два тега једнаких маса m_3. Тегови се налазе на крајевима неистегљиве нити која је пребачена преко два лагана котура као што је приказано на слици. Систем се слободно креће. Ако је $m_1 = m$, $m_2 = 2m$, $m_3 = 0,5m$ и ако се на почетку оба тега налазе на висини $H = 1\text{m}$ у односу на подлогу, наћи брзину којом се креће коцка масе m_2 у тренутку када тег, који је уз њу, удари о подлогу. Трење занемарити. Убрзање силе земљине теже износи $g = 9,81\text{m/s}^2$. **(20п)**



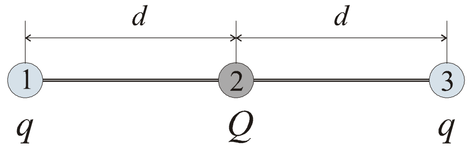
2. Вода истиче из неког великог резервоара кроз хоризонталну цев која је на крају савијена под углом $\alpha=5^{\circ}$ у односу на вертикалан правац (види слику). Полупречник цеви је свуда исти и износи $r = 1\text{cm}$ а дужина хоризонталног дела цеви је $l = 20\text{cm}$. Запремински проток воде износи $Q = 0,1\text{l}/\text{s}$. Извести општи израз и израчунати бројну вредност интензитета момента силе реакције воде на зидове цеви у односу на тачку О узрокован истицањем воде. За мале углове важи: $\cos\alpha \approx 1-\alpha^2/2$. **(20 п)**



3. У топлотно изолованој цилиндричној посуди висине h и површине попречног пресека S , на висини h_1, налази се покретни лагани клип занемарљиве дебљине. Изнад клипа (до врха посуде) се налази вода а испод клипа ваздух који се греје, услед чега клип почиње да се креће навише истискујући при том воду из посуде. У току процеса загревања, веза између притиска и запремине је линеарна. Ако је почетна температура ваздуха T_1, наћи рад који изврши гас над околином , промену унутрашње енергије гаса као и општи израз за количину топлоте коју треба предати гасу да би клип истиснуо сву количину воде из посуде. Ваздух сматрати идеалним гасом. Познате су моларна маса гаса M, специфична топлотна капацитативност гаса c_v, густина воде ρ_{H_2O} и атмосферски притисак p_a. **(20 п)**



4. У вакууму, на хоризонталној изолаторској жици, налазе се три металне куглице једнаких полупречника r и маса m. Куглице 1 и 3 су учвршћене док кугла 2 може да клизи по жици без трења. Наелектрисања куглица су редом q, Q и q. У почетном тренутку удаљеност између две узастопне куглице је d при чему важи да је $d \rangle 2r$ (види слику). Одредити интензитет резултујуће силе која делује на средњу куглицу: а) у почетном тренутку; б) у случају када средњу куглицу померимо тако да додирне прво једну (куглица 1) а затим и другу спољашњу куглицу (куглица 3) и после тога је вратимо у почетни положај. **(15 п)**



5. Два тима студената, група А и група Б, урадила су експеримент којим су измерили топлотне капацитативности једног мола једноатомског гаса са инструментима и експерименталном поставком коју су сами направили. Добили су резултате који су приказани у Табелама 1 и 2. Пажљивом анализом експерименталних резултата утврдите чији је експеримент тачнији, а чији прецизнији. Познато је да су табличне вредности за једноатомске гасове $C_p = (5/2)R$ и $C_V = (3/2)R$, где је вредност $R = 8,32\ \text{J}/(\text{molK})$. Таблична вредност коефицијента адијабате за исти гас износи $\gamma = 5/3$.

Табела 1. Експериментални резултати групе А.	
C_p [J/(mol K)]	C_V [J/(mol K)]
22,31	13,99
22,30	13,98
22,29	13,97
22,30	13,98
22,31	13,99
22,29	13,97

Табела 2. Експериментални резултати групе Б.	
C_p [J/(mol K)]	C_V [J/(mol K)]
72,83	43,71
72,80	43,68
72,76	43,64
72,80	43,68
72,83	43,71
72,76	43,64

(25 п)

* * * * * * * * * *

ПОМОЋ

Неке основне тригонометријске једнакости и формуле:

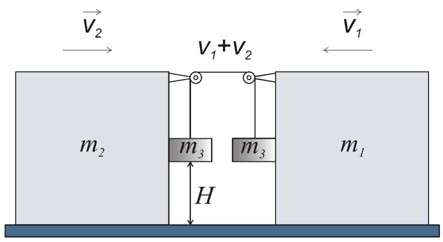
$\sin 0° = 0$	$\sin 30° = 1/2$	$\sin 45° = \sqrt{2}/2$	$\sin 60° = \sqrt{3}/2$	$\sin 90° = 1$
$\cos 0° = 1$	$\cos 30° = \sqrt{3}/2$	$\cos 45° = \sqrt{2}/2$	$\cos 60° = 1/2$	$\cos 90° = 0$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$	$\sin^2(\alpha/2) = (1-\cos\alpha)/2$
$\sin\alpha = 1/\sqrt{1+\mathrm{ctg}^2\alpha}$	$\cos^2(\alpha/2) = (1+\cos\alpha)/2$
$\cos\alpha = 1/\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}$	$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$
$\mathrm{tg}\,2\alpha = 2\mathrm{tg}\alpha/(1-\mathrm{tg}^2\alpha)$	$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$
$\sin(\alpha\pm\beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$	$\cos(\alpha\pm\beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

Задатке припремили:
др Сања Тошић,
Институт за физику, Београд
др Бојан Николић,
Институт за физику, Београд

Рецензент: *др Драган Д. Маркушев*,
Институт за физику, Београд
Председник Комисије за такмичења ученика средњих школаДФС:*др Александар Крмпот*,
Институт за физику, Београд

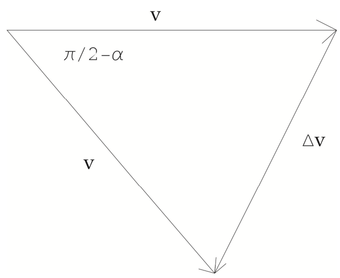
РЕШЕЊА ЗАДАТАКА – фермионска категорија



P1. Из закона одржања импулса за систем: $(m_2+m_3)v_2=(m_1+m_3)v_1$ **(3п)** добијамо брзину v_1: $v_1=v_2(m_2+m_3)/(m_1+m_3)$ **(2п)**. По услову задатка је $m_1=m$, $m_2=2m$ и $m_3=0,5m$. Увођењем смене $m_3/m=0,5=k$ израз за брзину постаје: $v_1=v_2(2+k)/(1+k)$ **(3п)**. Хоризонтална нит се скраћује брзином v_1+v_2 **(2п)** . Тегови масе m_3 имају једнака убрзања и до подлоге ће доћи истовремено **(2п)**. Закон одржања енергије за систем је: $(m_2+m_3)v_2^2/2+m_3\left[(v_1+v_2)/2\right]^2/2+(m_1+m_3)v_1^2/2+m_3\left[(v_1+v_2)/2\right]^2=2m_3gH$ **(4п)**.

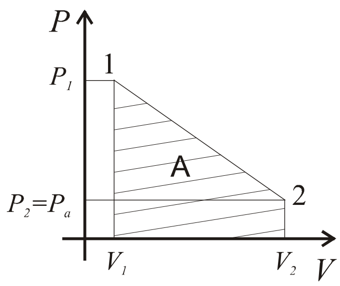
Заменом израза за v_1 и сређивањем добијамо:

$\boxed{v_2=\sqrt{8kgH(1+k)^2/\left[(3+2k)(4k^2+9k+4)\right]}=1,52\text{m/s}}$ **(4п)**.



P2. Посматрајмо делић воде масе $\Delta m=\rho\Delta V$ **(2п)**. Интензитет силе која делује на њега је по другом Њутновом закону: $F=\Delta m\Delta v/\Delta t=\rho\Delta V\Delta v/\Delta t$ **(2п)**. Сила се јавља као резултат промене правца брзине, док је интензитет непосредно пре и после скретања исти. Како је запремински проток по дефиницији: $Q=\Delta V/\Delta t$ **(1п)** , то израз за силу добија следећи облик: $F=\rho Q\Delta v$ **(2п)**. Интензитет промене брзине воде налазимо из ромба чије су странице v и оштар угао $\pi/2-\alpha$, $\Delta v=2v\sin(\pi/4-\alpha/2)$ **(3п)**, где је v брзина воде кроз цев и износи: $v=Q/(r^2\pi)$ **(2п)**. Коначно, интензитет силе је: $F=2\rho Q^2\sin(\pi/4-\alpha/2)/(r^2\pi)$ **(2п)**. Интензитет момента силе је: $M=Fl\cos(\pi/4-\alpha/2)=\rho Q^2 l\cos\alpha/(r^2\pi)$ **(4п)**. За задате бројне вредности, уз апроксимацију да је угао α мали, интензитет момента силе је: $\boxed{M\approx 0,006\text{Nm}}$ **(2п)**.

P3. У почетном тренутку, гас се налази под притиском: $p_1=p_a+m_{H_2O}g/S$ **(1п)**. Масу воде добијамо као: $m_{H_2O}=\rho_{H_2O}V_{H_2O}=\rho_{H_2O}(V_c-V_1)=\rho_{H_2O}S(h-h_1)$ **(2п)** где су V_c и V_1 запремина цилиндра и почетна запремина коју заузима гас. Заменом у прву једначину добијамо: $p_1=p_a+\rho_{H_2O}g(h-h_1)$ **(1п)**. Када клип истисне воду из цилиндра, параметри гаса су: $p_2=p_a$ и $V_2=V_c=Sh$ **(1п)**. Током процеса не мења се количина гаса: $p_1V_1/T_1=p_2V_2/T_2$ па је коначна температура: $T_2=T_1p_2V_2/(p_1V_1)$ **(1п)**, тј. $T_2=T_1p_ah/\left[p_a+\rho_{H_2O}g(h-h_1)\right]h_1$ **(2п)**. Рад можемо наћи помоћу $p-V$ дијаграма (површина испод графика): $A=(p_1+p_2)(V_2-V_1)/2=(p_1+p_2)S(h-h_1)/2$ **(1п)**



што сређивањем даје: $\boxed{A=\left[2p_a+\rho_{H_2O}g(h-h_1)\right]S(h-h_1)/2}$ **(2п)**. Количина топлоте која се предаје гасу је: $Q=\Delta U+A$ **(1п)**. Промена унутрашње енерије гаса је: $\Delta U=mc_v(T_2-T_1)$ **(1п)**. Масу ваздуха можемо добити из једначине стања: $p_1V_1=mRT_1/M$,

$m=P_1V_1M/RT_1=p_1Sh_1M/RT_1=\left[p_a+\rho_{H_2O}g(h-h_1)\right]Sh_1M/RT_1$ **(2п)**. Промена унутрашње енергије гаса је сада: $\boxed{\Delta U = SMc_v(h-h_1)(p_a-\rho_{H_2O}gh_1)/R}$ **(2п)**. Коначно, заменом у израз за количину топлоте добијамо: $\boxed{Q = S(h-h_1)\left[p_a(Mc_v/R+1)+\rho_{H_2O}g((h-h_1)/2-h_1Mc_v/R\right]}$ **(3п).**

Р4. а) Због симетрије система резултујућа сила је једнака нули, тј. $F_r = 0$.**(2п)**
б) У тренутку додира долази до прерасподеле наелектрисања. После првог додира наелектрисања на куглицама су редом: $(q+Q)/2$, $(q+Q)/2$, q **(3п)**. После другог додира, наелектрисање прве куглице је $(q+Q)/2$, друге куглице $(q+Q+2q)/4$, тј. $(3q+Q)/4$. Наелектрисање треће куглице је такође $(3q+Q)/4$ **(3п)**. Резултујућа сила је: $F_r = F_3 - F_1$ **(1п)** где су одговарајуће силе којима куглице 3 и 1 делују на куглицу 2 редом: $F_3 = (1/4\pi\varepsilon_0)\left(\dfrac{3q+Q}{4}\right)\left(\dfrac{3q+Q}{4}\right)/d^2$ **(2п)** и $F_1 = (1/4\pi\varepsilon_0)\left(\dfrac{q+Q}{2}\right)\left(\dfrac{3q+Q}{4}\right)/d^2$ **(2п)** . Заменом и сређивањем, добијамо да је интензитет резултујуће силе: $\boxed{F_r = (1/4\pi\varepsilon_0)(3q+Q)(q-Q)/(4d)^2}$ **(2п).**

Р5. Ако се зна да је $C_p - C_V = R$ и $\gamma = C_p/C_V$, пажљивом анализом резултата из Табеле 1 очигледно је да се могу добити табличне вредности само за $R = 8{,}32\ \mathrm{J/(mol\cdot K)}$, а не и за γ (види Табелу 3). То указује на чињеницу да је група А имала грешку мерења, чија је природа таква да увећава све резултате мерења за неку вредност $\alpha = 1{,}5\ \mathrm{J/(mol\,K)}$, тј. $C_p = C'_p + \alpha$ и $C_V = C'_V + \alpha$, где су C'_p и C'_V кориговане вредности експеримента **(1п)**. Пошто α представља систематско одступање, тј. одступање у истом смислу (величина и знак одступања јесу исти у свим мерењима), грешка мерења групе А јесте систематска грешка **(1п).** Таква грешка омогућава корекцију експерименталних резултата, и они су приказани, кроз C'_p и C'_V, у Табели 3.

Табела 3. Анализа експерименталних резултата групе А.

$R = C_p - C_V$ [J/(molK)]	$\gamma = C_p / C_V$ [J/(molK)]	α [J/(molK)]	$C'_p = C_p - \alpha$ [J/(molK)]	$C'_V = C_V - \alpha$ [J/(molK)]
8,32	1,59	1,5	20,81	12,49
8,32	1,59	1,5	20,80	12,48
8,32	1,60	1,5	20,79	12,47
8,32	1,59	1,5	20,80	12,48
8,32	1,59	1,5	20,81	12,49
8,32	1,58	1,5	20,79	12,47
8,32	1,59	1,5	20,81	12,49

(3п)

Када се израчунају средње вредности коригованих резултата, добија се да су $\langle C'_p \rangle = 20{,}80\ \mathrm{J/(mol\,K)}$ **(1п)** и $\langle C'_V \rangle = 12{,}48\ \mathrm{J/(mol\,K)}$ **(1п)**. Апсолутна грешка коригованих вредности (као максимално одступање од средњих вредности) износи $\Delta\langle C'_p \rangle = \Delta\langle C'_V \rangle = 0{,}01\ \mathrm{J/(mol\,K)}$ **(1п)**. Коначни резултати анализе резултата из Табеле 1 дају вредности $\langle C'_p \rangle = (20{,}80 \pm 0{,}01)\ \mathrm{J/(mol\,K)}$ **(1п)** и $\langle C'_V \rangle = (12{,}48 \pm 0{,}01)\ \mathrm{J/(mol\,K)}$ **(1п)**, што се у потпуности слаже са датим табличним вредностима за $C_p = 20{,}80\ \mathrm{J/(mol\,K)}$ и $C_V = 12{,}48\ \mathrm{J/(mol\,K)}$. Поклапање средњих вредности мерења са датом табличном вредношћу говори о томе да су мерења ***тачна***, а мала одступања у виду апсолутне грешке говоре о томе да су мерења ***прецизна*** **(1п)** . Релативне грешке су $\Delta\left\langle C'_p\right\rangle / \left\langle C'_p\right\rangle = 5\cdot 10^{-4} = 0,5\%$ и $\Delta\left\langle C'_V\right\rangle / \left\langle C'_V\right\rangle = 8\cdot 10^{-4} = 0,8\%$. **(1п)**

Пажљивом анализом резултата из Табеле 2 очигледно је да се могу добити табличне вредности за $\gamma = 1,67$, а не и за R (види Табелу 4). То указује на чињеницу да је група Б имала грешку мерења, чија је природа таква да множи све резултате мерења за неку вредност $\beta = 3,5$, тј. $C_p = \beta C'_p$ и $C_V = \beta C'_V$,где су C'_p и C'_V кориговане вредности експеримента **(1п)**. Пошто β представља систематско одступање, тј. одступање у истом смислу (величина и знак одступања јесу исти у свим мерењима), грешка мерења групе Б јесте систематска грешка **(1п)**. Таква грешка омогућава корекцију експерименталних резултата, и они су приказани, кроз C'_p и C'_V, у Табели 4.

Табела 4. Анализа експерименталних резултата групе Б.

$R = C_p - C_V$ [J/(molK)]	$\gamma = C_p / C_V$ [J/(molK)]	β	$C'_p = C_p / \beta$ [J/(molK)]	$C'_V = C_V / \beta$ [J/(molK)]
29,12	1,67	3,5	20,81	12,49
29,12	1,67	3,5	20,80	12,48
29,12	1,67	3,5	20,79	12,47
29,12	1,67	3,5	20,80	12,48
29,12	1,67	3,5	20,81	12,49
29,12	1,67	3,5	20,79	12,47
29,12	1,67	3,5	20,81	12,49

(3п)

Као и у претходном случају, добијају се идентичне вредности мерених величина: $\left\langle C'_p\right\rangle = \left(20,80 \pm 0,01\right)\ \mathrm{J}/\left(\mathrm{mol\ K}\right)$ **(3п)** и $\left\langle C'_V\right\rangle = \left(12,48 \pm 0,01\right)\ \mathrm{J}/\left(\mathrm{mol\ K}\right)$ **(3п)**, са релативним грешкама $\Delta\left\langle C'_p\right\rangle / \left\langle C'_p\right\rangle = 5\cdot 10^{-4} = 0,5\%$ и $\Delta\left\langle C'_V\right\rangle / \left\langle C'_V\right\rangle = 8\cdot 10^{-4} = 0,8\%$ **(1п)**.

Према добијеним резултатима експерименти који су урађени од стране група А и Б имају ***исту тачност*** и ***исту прецизност***. **(1п)**