49. РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ ФИЗИКЕ
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА ШКОЛСКЕ 2010/2011. ГОДИНЕ

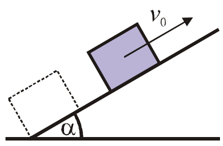
II РАЗРЕД

Друштво Физичара Србије
Министарство просвете и науке
Републике Србије

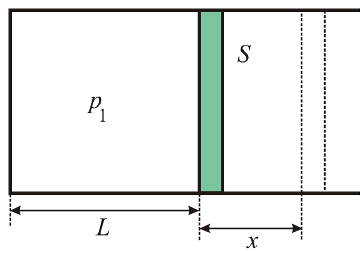
ФИЗИЧКИ ФАКУЛТЕТ
БЕОГРАД
09.04.2011.

ЗАДАЦИ

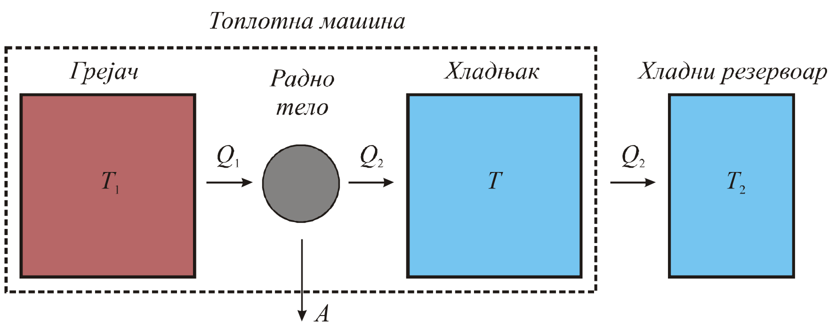
1. Малу плочицу, која је мировала на почетку стрме равни нагибног угла α, гурнули смо уз ту стрму раван саопштивши јој почетну брзину v_0 (види слику). а) За које време t_0 ће се плочица вратити у свој почетни положај ако нема трења? б) Уколико трење постоји, при којим вредностима коефицијента трења μ ће се плочица сигурно вратити назад? в) Уколико трење постоји, израчунајте време t_μ повратка плочице у свој почетни положај; г) При којим вредностима коефицијента трења μ ће времена t_μ и t_0 бити једнака? **(20 п)**



2. У хоризонталном цилиндричном суду, затвореном танким клипом, налази се идеалан гас (види слику) чији је притисак $p_1 = 4\cdot 10^5$ Pa. Растојање од дна суда до клипа износи $L = 30$ cm. Површина попречног пресека клипа износи S. Као резултат процеса загревања гас је добио количину топлоте $Q = 1{,}65$ kJ. При том загревању клип је неко време мировао а онда се лагано померио за $x = 10$ cm. При кретању клипа на њега је, од стране зидова суда, деловала сила трења $F_T = 3\cdot 10^3$ N. Сматрајући да се суд налази у вакууму изведите општи израз и израчунајте бројну вредност површине клипа S. **(20 п)**



3. У топлотној машини, која ради по Карноовом циклусу, температура грејача износи $T_1 = 800$ K а температура хладњака T зависи од снаге P топлотне машине. Хладњак посматрамо као масивно тело топлотно изоловано од окружујуће средине које, посредством неке топлотне проводности, предаје хладном резервоару, температуре $T_2 = 300$ K, сву топлотну енергију Q_2 добијену за време Δt рада машине (види слику). Топлотна проводљивост машине дата је законом $Q_2 = \lambda(T - T_2)\Delta t$, где је $\lambda = 1{,}0\,\mathrm{kW/K}$ коефицијент топлотне проводљивости. а) Изведите општи израз за снагу P топлотне машине преко T_1, T и T_2; б) Израчунајте температуру T_m хладњака при којој је снага машине максимална; в) Израчунајте ту максималну снагу P_{max} топлотне машине; г) Израчунајте коефицијент корисног дејства μ_m топлотне машине при раду са максималном снагом. **(20 п)**

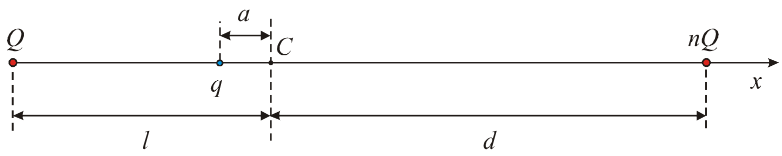


4. Балон запремине $V = 2\,\mathrm{dm}^3$ садржи $m_{H_2} = 2$ g гаса водоника и мало воде. Притисак у балону износи $p_1 = 17\times 10^5$ Pa. Балон загревамо све дотле док притисак у њему не достигне вредност $p_2 = 26\times 10^5$ Pa. Користећи се датом табелом

T / [K]	373	380	390	400	410	420	430	440	450	460
p_{H_2O} /[$\times 10^5$ Pa]	1,01	1,23	1,74	2,39	3,21	4,42	5,87	7,74	9,35	11,60

и знајући да је укупан притисак у балону $p(T)$ једнак збиру притисака водоника $p_{H_2}(T)$ и засићене водене паре $p_{H_2O}(T)$ ($p(T) = p_{H_2}(T) + p_{H_2O}(T)$): а) израчунајте температуру у балону на почетку и на крају процеса загревања; б) израчунајте укупну масу воде која је испарила током процеса загревања. Водоник и засићену пару посматрати као идеалне гасове. Моларна маса водоника је $M_{H_2} = 2\times10^{-3}$ kg/mol а моларна маса засићене водене паре је $M_{H_2O} = 18\times10^{-3}$ kg/mol. Универзална гасна константа је $R = 8{,}3$ J/(mol K). **(15 п)**

5. Два позитивна тачкаста наелектрисања Q и nQ постављамо дуж x- осе тако да чине изоловани систем, као на слици, код кога је увек сила међусобног дејства између наелектрисања у тачки C једнака нули. Наелектрисање Q је фиксирано (l) док положај nQ може да се мења (d) у зависности од n $(n \geq 1)$. Поставимо неко пробно тачкасто позитивно наелектрисање q дуж x- осе на растојање a $(a << l)$ од тачке C (види слику). а) Изведите општи израз за укупну силу међудејства $F(a,n)$ којом наелектрисања Q и nQ делују на q у датој тачки (види слику) и одредите њен смер дуж x- осе; б) Коју вредност треба да има n да би важио однос $F(a,n)/F(a,1) = 3/4$; в) За вредност n добијену под б) мерена је укупна јачина електростатичког поља $E(a,n)$, које потиче од Q и nQ у тачки где се налази q на x- оси, у зависности од различитих вредности a $(a << l)$, и на основу тих мерења добијена је табела:



E /[V/m]	4,3	8,6	13,0	17,2	21,6
a /[$\times10^{-3}$ m]	1	2	3	4	5

Користећи ову табелу нацртајте график $E(a,n) = f(a)$. Помоћу тог графика одредите вредност l, знајући да је $\Delta a = 2\times10^{-5}$ m и $\delta E = \Delta E / E = 2\% = 0{,}02$. Узети да је $1/(4\pi\varepsilon_0) = 9\times10^9$ m/F, а $Q = 1{,}6\times10^{-7}$ C. **(25 п)**

* * * * * * * * * *

ПОМОЋ

Функција $ax - bx^3 = 0$ има три нуле: $x_1 = 0$, $x_{2/3} = \pm\sqrt{a/b}$

Функција $\left(x + \frac{a}{x}\right)$ има минимум за $x = \sqrt{a}$

* * * * * * * * * *

Задатке припремила: *Сања Тошић,* Институт за физику, Београд
Рецензент: *др Драган Д. Маркушев,* Институт за физику, Београд
Председник Комисије за такмичење ДФС: *Проф. др Мићо Митровић,* Физички факултет, Београд

Р1. а) Уколико нема трења време повратка плочице у свој почетни положај биће

$$\boxed{t_0 = 2\frac{v_0}{g\sin\alpha}.}\ \textbf{(3 п)}$$

б) Уколико постоји трење плочица ће се кретати уз стрму раван успорењем које је по интензитету једнако

$$a_1 = g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha).\ \textbf{(2 п)}$$

Време t_1 кретања плочице уз стрму раван једнако је

$$t_1 = \frac{v_0}{a_1} = \frac{v_0}{g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}.\ \textbf{(2 п)}$$

При томе плочица до заустављања пређе пут

$$s = v_0 t_1 - \frac{a_1 t_1^2}{2} = t_1\left(v_0 - \frac{v_0}{2}\right) = \frac{v_0^2}{2g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}.\ \textbf{(2 п)}$$

По заустављању, плочица почиње да клизи назад низ стрму раван убрзањем

$$a_2 = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha).\ \textbf{(2 п)}$$

Да би плочица уопште кренула назад мора бити задовољен услов да је $a_2 = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) > 0$ тј. $\boxed{\mu < \mathrm{tg}\alpha}$. **(2 п)**

в) Време t_2 спуштања плочице налазимо, користећи се резултатима под б), помоћу

$$t_2^2 = \frac{2s}{a_2} \Rightarrow t_2 = \frac{v_0}{g}\frac{1}{\sqrt{\sin^2\alpha - \mu^2\cos^2\alpha}}.\ \textbf{(2 п)}$$

Време t_μ повратка плочице у свој почетни положај добијамо као $t_\mu = t_1 + t_2$, што даје

$$\boxed{t_\mu = \frac{v_0}{g}\left(\frac{1}{\sin\alpha + \mu\cos\alpha} + \frac{1}{\sqrt{\sin^2\alpha - \mu^2\cos^2\alpha}}\right).}\ \textbf{(2 п)}$$

г) Ако уведемо смену $x = \mu/\mathrm{tg}\alpha$ онда добијени израз за t_μ поприма облик

$$t_\mu = \frac{v_0}{g\sin\alpha}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right).$$

При $x \to 1 \Rightarrow t_\mu \to \infty$. При $t_0 = t_\mu$ имамо да је

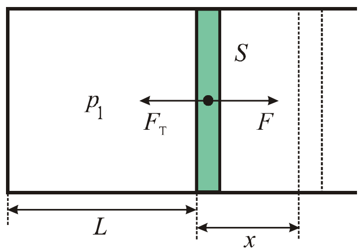
$$2 = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Одатле је, сређивањем, $x - 2x^3 = 0$. Пошто је $x \geq 0$ онда су корени ове једначине $x_1 = 0$ и $x_2 = 1/\sqrt{2}$. Одатле добијамо да за $t_0 = t_\mu$ коефицијент трења треба да има вредност

$$\boxed{\mu_0 = \frac{\mathrm{tg}\alpha}{\sqrt{2}}.}\ \textbf{(3 п)}$$

* * *

P2. а) На клип по хоризонтали делују две силе: сила притиска гаса F и сила трења $F_\text{Т}$ (види слику). Пошто на почетку процеса загревања клип неко време мирује, а потом се лагано помери, можемо тврдити да је на почетку процеса сила притиска гаса мања од максималне силе трења мировања. Када се гас загрејао његов притисак је порастао на вредност p_2, и тада се сила притиска изједначила са силом трења, а клип је почео лагано да се креће. При томе важи да је



$$p_2 S = F_\text{Т}.\ \textbf{(2 п)}$$

Као што се види, гас приликом загревања пролази кроз два процеса: на почетку *изохорско загревање*, а затим *изобарско ширење* на притиску p_2. По првом закону термодинамике количина топлоте коју гас добије приликом загревања једнака је

$$Q = \Delta U + A.\ \textbf{(2 п)}$$

У општем случају је промена унутрашње енергије гаса ΔU једнака

$$\Delta U = U_3 - U_1 = \frac{i\nu RT_3}{2} - \frac{i\nu RT_1}{2},\ \textbf{(2 п)}$$

где је i – број степени слободе ($i = 3$ за једноатомски гас, $i = 5$ за крути двоатомски гас, итд). У последњој једначини су температуре T_1 и T_3 почетна и коначна температура у процесу загревања, респективно. На основу једначине стања идеалног гаса можемо да пишемо да је

$$p_1 SL = \nu RT_1,\ \textbf{(2 п)}$$

и

$$p_2 S(L+x) = \nu RT_3.\ \textbf{(2 п)}$$

Рад гаса при кретању клипа једнак је

$$A = p_2 S x = F_{\mathrm{T}} x\,.\ \textbf{(2 п)}$$

Комбинацијом последње четири једначине добијамо израз за Q у облику

$$Q = \frac{i}{2} F_{\mathrm{T}} (L + x) - \frac{i}{2} p_1 S L + F_{\mathrm{T}} x\,.\ \textbf{(2 п)}$$

Из последње једначине добијамо општи израз за површину попречног пресека клипа S:

$$\boxed{S = \frac{1}{p_1}\left\{F_{\mathrm{T}}\left[1 + \left(1 + \frac{2}{i}\right)\frac{x}{L}\right] - \frac{2}{i}\frac{Q}{L}\right\},}\ \textbf{(2 п)}$$

на основу кога добијамо и његову бројну вредност:

$$\boxed{S = \frac{1}{p_1}\left\{F_{\mathrm{T}}\left[1 + \frac{5}{3}\frac{x}{L}\right] - \frac{2}{3}\frac{Q}{L}\right\} \approx 25\,\mathrm{cm}^2 = 2{,}5 \times 10^{-3}\ \mathrm{m}^2}$$ за једноатомски $(i = 3)$ гас **(2 п)**

$$\boxed{S = \frac{1}{p_1}\left\{F_{\mathrm{T}}\left[1 + \frac{7}{5}\frac{x}{L}\right] - \frac{2}{5}\frac{Q}{L}\right\} \approx 55\,\mathrm{cm}^2 = 5{,}5 \times 10^{-3}\ \mathrm{m}^2}$$ за крути двоатомски $(i = 5)$ гас **(2 п)**

итд.

* * *

Р3. а) Посматрајмо рад топлотне машине за јединично време $\Delta t = 1\,\mathrm{s}$. Коефицијент корисног дејства μ Карноовог циклуса износи

$$\mu = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{P}{P + P_2} = \frac{T_1 - T}{T_1},\ \textbf{(3 п)}$$

где је P снага машине, а P_2 топлотна снага која се предаје хладњаку. Из овог последњег израза следи да је

$$P = P_2 \frac{T_1 - T}{T}\,.\ \textbf{(3 п)}$$

Из услова задатка следи да је

$$P_2 = (Q_2)_{\Delta t = 1\,\mathrm{s}} = \lambda (T - T_2)\,.\ \textbf{(3 п)}$$

Заменом P_2 у једначини за P добијамо

$$\boxed{P = \lambda (T - T_2)\frac{T_1 - T}{T} = \lambda\left[T_1 + T_2 - \left(T + \frac{T_1 T_2}{T}\right)\right].}\ \textbf{(3 п)}$$

б) Снага P ће бити максимална онда када величина $(T + T_1T_2/T)$ буде минимална, а то је у случају када је

$$\boxed{T = T_\mathrm{m} = \sqrt{T_1T_2} = 489{,}9\,\mathrm{K} \approx 490\,\mathrm{K}.}\ \textbf{(2 п)}$$

в) Сада је максимална снага једнака

$$\boxed{P_\mathrm{max} = \lambda\left[T_1 + T_2 - 2\sqrt{T_1T_2}\right] = \lambda\left(\sqrt{T_1} - \sqrt{T_2}\right)^2 = 120\,\mathrm{kW}.}\ \textbf{(3 п)}$$

г) Коефицијент корисног дејства μ топлотне машине при раду са максималном снагом износи

$$\boxed{\mu = \frac{T_1 - T_\mathrm{m}}{T_1} = 38{,}7\%.}\ \textbf{(3 п)}$$

* * *

P4. На основу једначине стања идеалног гаса можемо написати да је

$$p_{\mathrm{H_2}}(T) = \frac{m_{\mathrm{H_2}}}{M_{\mathrm{H_2}}V}RT = \frac{2\times10^{-3}\ \mathrm{kg}}{2\times10^{-3}\ \dfrac{\mathrm{kg}}{\mathrm{mol}}\cdot 2\times10^{-3}\ \mathrm{m}^3}\cdot 8{,}3\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol}\cdot\mathrm{K}}\cdot T = 4{,}15\times10^3\,\frac{\mathrm{Pa}}{\mathrm{K}}\cdot T\,,\ \textbf{(2 п)}$$

па можемо формирати табелу, знајући из поставке задатка да је укупан притисак у балону $p(T) = p_{\mathrm{H_2}}(T) + p_{\mathrm{H_2O}}(T)$:

T / [K]	373	380	390	400	410	420	430	440	450	460
$p_{\mathrm{H_2O}}$ /[$\times10^5$ Pa]	1,01	1,23	1,74	2,39	3,21	4,42	5,87	7,74	9,35	11,60
$p_{\mathrm{H_2}}$ /[$\times10^5$ Pa]	15,48	15,77	16,18	16,60	17,01	17,43	17,84	18,26	18,68	19,09
p /[$\times10^5$ Pa]	16.49	17,00	17,92	18.99	20,22	21,85	23,71	26,00	28.03	30.69

(5 п)

а) Видимо да је, по услову задатка ($p_1 = 17\times10^5$ Pa и $p_2 = 26\times10^5$ Pa) и добијеној табели, почетна температура смеше водоника и засићене водене паре у балону $\boxed{T_1 = 380\,\mathrm{K}}$ **(1 п)** а крајња $\boxed{T_2 = 440\,\mathrm{K}}$ **(1 п)**.

б) Израчунајмо сада укупну масу воде која је испарила у току процеса загревања. Једначине стања засићене водене паре у почетном и крајњем тренутку биће:

$$p_{1\mathrm{H_2O}} = \frac{m_{1\mathrm{H_2O}}}{M_{\mathrm{H_2O}}V}RT_1\,,\ \textbf{(1 п)}\ \text{и}\ p_{2\mathrm{H_2O}} = \frac{m_{2\mathrm{H_2O}}}{M_{\mathrm{H_2O}}V}RT_2\,,\ \textbf{(1 п)}$$

где из табеле узимамо бројне вредности $p_{1H_2O} = 1{,}23\times10^5$ Pa **(1 п)** и $p_{2H_2O} = 7{,}74\times10^5$ Pa **(1 п)**. Сада је укупна маса Δm воде која је испарила једнака:

$$\boxed{\Delta m = m_{2H_2O} - m_{1H_2O} = \frac{M_{H_2O}V}{R}\left(\frac{p_{2H_2O}}{T_2} - \frac{p_{1H_2O}}{T_1}\right) = 6{,}2\times10^{-3}\ \text{kg}}.\ \textbf{(2 п)}$$

* * *

P5. а) Укупна сила међудејства $F(a,n)$ којом наелектрисања Q и nQ делују на q у датој тачки може се израчунати користећи се општим изразом (види слику)

$$F(a,n) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{(l-a)^2} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qnQ}{\left(\sqrt{n}l + a\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}qQ\left[\frac{1}{(l-a)^2} - \frac{n}{\left(\sqrt{n}l + a\right)^2}\right] =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{l^2}\left[\frac{1}{\left(1-\frac{a}{l}\right)^2} - \frac{n}{\left(\sqrt{n}+\frac{a}{l}\right)^2}\right] = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{l^2}\left[\frac{\left(\sqrt{n}\right)^2 + 2\sqrt{n}\frac{a}{l} + \left(\frac{a}{l}\right)^2 - n + 2n\frac{a}{l} - n\left(\frac{a}{l}\right)^2}{\left(1-\frac{a}{l}\right)^2\left(\sqrt{n}+\frac{a}{l}\right)^2}\right],$$

где је узето, по услову задатка да је сила међусобног дејства између наелектрисања у тачки C једнака нули, $d = \sqrt{n}l$ **(1 п)**. Узевши у обзир да је $a << l$ и $n \geq 1$, добијамо да је

$$\boxed{F(a,n) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}2qQ\frac{a}{l^3}\frac{\sqrt{n}+n}{n}}.\ \textbf{(3 п)}$$

Сила је усмерена *ка тачки* C тј. у *позитивном смеру* x - осе. **(1 п)**

б) По услову задатка је

$$\frac{F(a,n)}{F(a,1)} = \frac{3}{4}$$

што, користећи се изразом за $F(a,n)$ добијеним под а), даје једначину

$$\frac{\frac{\sqrt{n}+n}{n}}{2} = \frac{3}{4},\ \text{или}\ \sqrt{n}\left(2-\sqrt{n}\right) = 0,\ \text{па је}\ \boxed{n = 4.}\ \textbf{(1 п)}$$

в) За вредност n добијену под б) мерена је укупна јачина електростатичког поља $E(a,4)$, које потиче од Q и $4Q$ у тачки где се налази q, у зависности од различитих вредности

a $(a << l)$ по формули

$$E(a,4) = \frac{F(a,4)}{q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} 2Q \frac{a}{l^3} \frac{\sqrt{4}+4}{4} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} 3Q \frac{a}{l^3} \text{. } \mathbf{(2\ п)}$$

Из коначног израза за $E(a,4)$ јасно је да се може нацртати линеаризовани график $E(a,4) = f(a)$ користећи се изразом

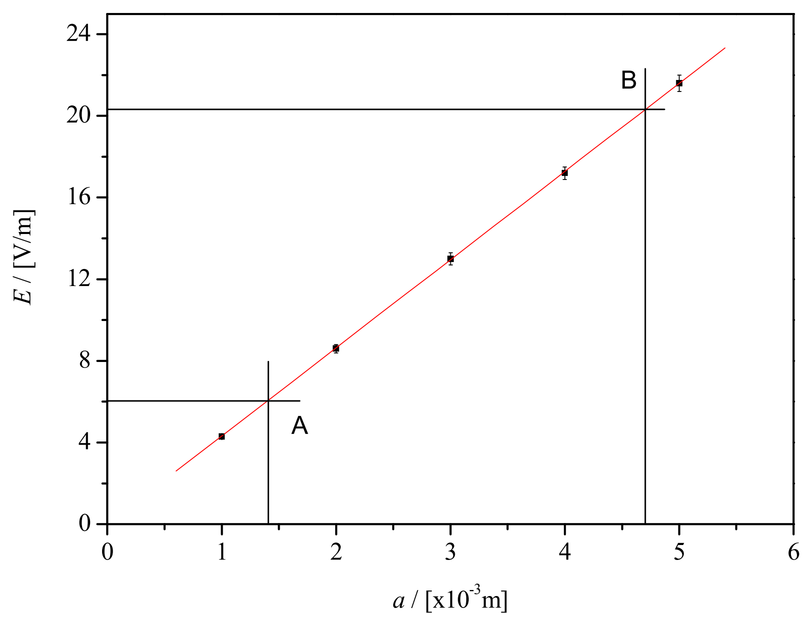
$$E = ba \text{, } \mathbf{(1\ п)}$$

где је $b = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{3Q}{l^3}$ коефицијент правца праве графика. График $E(a,4) = f(a)$ се црта на основу табеле **(2 п)**

$(E \pm \Delta E)/[\text{V/m}]$	4,3±0,1	8,6±0,2	13,0±0,3	17,2±0,3	21,6±0,4
$(a \pm \Delta a)/[\times 10^{-3}\,\text{m}]$	1,00±0,02	2,00±0,02	3,00±0,02	4,00±0,02	5,00±0,02

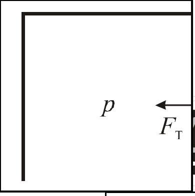
где су грешке за E и a дате у поставци задатка ($\Delta a = 2\times 10^{-5}$ m и $\delta E = \frac{\Delta E}{E} = 2\% = 0{,}02$).

График зависности јачине електростатичког поља E од растојања a.



(4 п)

Када нацртамо поменути график, узмемо две тачке са праве и то тако да прву тачку узимамо између прве две **(1 п)** A(1,4 x10^{-3} m, 6,0 V/m), а другу између последње две експерименталне тачке **(1 п)** B(4,7 x10^{-3} m, 20,3 V/m). На основу њих добијамо коефицијент правца праве



$$b = \frac{E_В - E_А}{a_В - a_А} = \frac{(20{,}3 - 6{,}0)}{(4{,}7 - 1{,}4)} \times 10^3 \ \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}^2} = \frac{14{,}3}{3{,}3} \times 10^3 \ \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}^2} = 4{,}33 \times 10^3 \ \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}^2}. \ \textbf{(1 п)}$$

Грешка коефицијента правца износи

$$\Delta b = b\left(\frac{\Delta E_А + \Delta E_В}{E_В - E_А} + \frac{\Delta a_А + \Delta a_В}{a_В - a_А}\right) = 4{,}33 \times 10^3 \ \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}^2}\left(\frac{0{,}1 + 0{,}4}{14{,}3} + \frac{0{,}02 + 0{,}02}{3{,}3}\right) = 0{,}204 \times 10^3 \ \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}^2}. \ \textbf{(2 п)}$$

Сада је

$$\boxed{b = (4{,}4 \pm 0{,}2) \times 10^3 \ \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}^2}.} \ \textbf{(1 п)}$$

На основу $b = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3Q}{l^3}$ може се израчунати висина l као

$$l = \sqrt[3]{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3Q}{b}} = \sqrt[3]{9 \times 10^9 \ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{F}} \cdot \frac{3 \cdot 1{,}6 \times 10^{-7}\,\mathrm{C}}{4{,}4 \times 10^3 \ \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}^2}}} = 9{,}94 \times 10^{-1}\,\mathrm{m}. \ \textbf{(1 п)}$$

Грешка за овако израчунату висину износи

$$\Delta l = \frac{l}{3} \cdot \left(\frac{\Delta b}{b}\right) = \frac{9{,}94 \times 10^{-1}\ \mathrm{m}}{3} \cdot \left(\frac{0{,}2}{4{,}4}\right) = 0{,}15 \times 10^{-1}\ \mathrm{m}, \ \textbf{(2 п)}$$

па је на крају

$$\boxed{l = (1{,}00 \pm 0{,}02)\,\mathrm{m}.} \ \textbf{(1 п)}$$

* * *