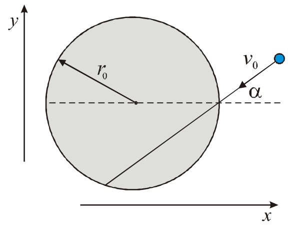
47. РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ ФИЗИКЕ
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА ШКОЛСКЕ 2008/2009. ГОДИНЕ

II РАЗРЕД

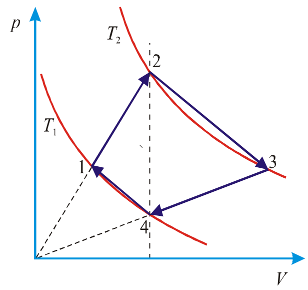
Друштво Физичара Србије
Министарство Просвете Републике Србије
ЗАДАЦИ

VIII ГИМНАЗИЈА
БЕОГРАД
04.04.2009.

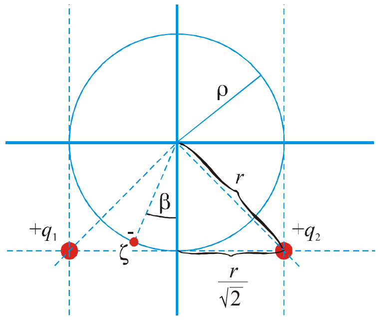
1. Крећући се по глаткој хоризонталној подлози (у *XY*-равни) константном брзином v_0, мала куглица (занемарљивих димензија) упада у цилиндричну рупу дубине h_0 и полупречника r_0 $(r_0 < h_0/2)$, еластично се сударајући са глатким зидовима и дном рупе. Вектор брзине куглице пре упада у рупу заклапа угао α са правом која пролази кроз центар кружног отвора рупе (видети слику). Скицирајте график кретања куглице у рупи $h = f(s)$, где је s хоризонтална компонента пређеног пута куглице, и то од тренутка њеног уласка до тренутка њеног изласка из рупе, и означите места судара куглице са зидовима рупе. Каква функционална веза треба да постоји између v_0 и параметара h_0, r_0, и α да би куглица искочила из рупе? Отпор ваздуха занемарити. Сматрати да се на путу до дна куглица судари само једном са зидом рупе. Убрзање силе земљине теже је g. **(20 п)**



2. Затворени термодинамички циклус састоји се из четири процеса (праве 1 – 2, 2 – 3, 3 – 4 и 4 - 1) које карактерише линеарна зависност притиска од запремине. Познате су температуре изотерми $T_1 = 290\,\text{K}$ и $T_2 = 300\,\text{K}$. Тачке 1, 2, 3 и 4 леже на датим изотермама (види слику). Праве 1 – 2 и 3 – 4 пролазе кроз координатни почетак а запремине V_2 и V_4 су једнаке. Израчунајте укупан рад једног мола идеалног гаса у овом затвореном циклусу ако се зна да универзална гасна константа износи $R = 8{,}3\ \text{J/(mol}\cdot\text{K)}$. **(15 п)**



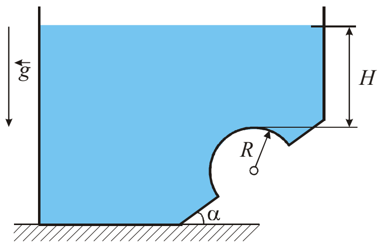
3. Негативно наелектрисана честица ζ може да се креће по кружници полупречника ρ. Она се налази у пољу непокретних позитивних наелектрисања q_1 и q_2 распоређених као на слици. У зависности од бројне вредности наелектрисања q_1 и q_2 честица заузима равнотежни положај на кружници под неким углом β као на слици. а) Нађите општи израз за однос q_1/q_2 као функцију угла β, б) Урадите исто као и под а) али сада сматрајући да је $\beta \ll 1$. **(20 п)**



4. У суду запремине $V = 1\,\text{m}^3$ се налази смеша гасова хелијума (ν_1) и кисеоника (ν_2). На температури T и притиску p, густина ове смеше износи ρ, а укупан број молова ове смеше износи ν $(\nu = \nu_1 + \nu_2,\ \nu_1/\nu_2 = 3)$. Експеримент је вршен тако да је, знајући почетне услове (p, T, ρ, ν), мерен притисак смеше гасова у суду p' након уклањања једног дела молекула кисеоника из те смеше (уз $T = const.$). Ако са ν' обележимо укупан број молова дате смеше по уклањању дела молекула кисеоника из ње, онда можемо формирати следећу табелу на основу резултата овог експеримента:

$p'/[10^4\,\text{Pa}]$	8,4	7,9	7,5	7,3	7,2	7,0
$\nu'/[\text{mol}]$	37,5	35,0	33.3	32.5	32,0	31,0

Знајући да је апсолутна грешка $\Delta p' = 5\times10^2\ \text{Pa}$ и релативна грешка $\delta\nu' = 0{,}1\,\%$, нацртајте график зависности $p' = f(\nu')$ и помоћу овог графика израчунајте почетне вредности основних параметара овог експеримента: притисак p, температуру T, густину смеше ρ и укупан број молова ове смеше ν, ако се зна да је за вредност $\nu' = 35\,\mathrm{mol}$ из смеше уклоњена половина од почетног броја молова молекула кисеоника. Универзална гасна константа износи $R = 8{,}3\ \mathrm{J/(mol\,K)}$, моларна маса хелијума је $M_{\mathrm{He}} = 4\times10^{-3}\ \mathrm{kg/mol}$ а моларна маса кисеоника износи $M_{\mathrm{O_2}} = 32\times10^{-3}\ \mathrm{kg/mol}$. Грешке за V, R, M_{He} и $M_{\mathrm{O_2}}$ су занемарљиве. **(25 п)**



5. Део дна суда са течношћу заклапа угао α са хоризонталом. На том делу дна се налази полусферно испупчење полупречника R (види слику). Висина стуба течности изнад испупчења износи $H = 2R$. Изведите, у општем случају, израз за вредност вертикалне компоненте силе F_{v} којом течност делује на то испупчење у зависности од угла α. Одредите смер силе F_{v} ако је: а) $\alpha = 40°$, б) $\alpha = 60°$, в) $\alpha = 80°$. Густина течности у суду је ρ. Убрзање силе земљине теже је g. **(20 п)**

* * * * * * * * * *

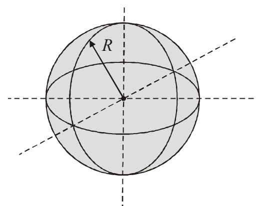
ПОМОЋ

Ако је $\alpha << 1$ онда важе приближне формуле:	
$(1 \pm \alpha)^p \approx (1 \pm p\alpha)$	$\cos\alpha \approx 1$
$e^{\alpha} \approx 1 + \alpha$	$\sin\alpha \approx \alpha$
$\ln(1+\alpha) \approx \alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha \approx \alpha$

Неке основне тригонометријске једнакости и формуле:				
$\sin 0° = 0$	$\sin 30° = \frac{1}{2}$	$\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sin 90° = 1$
$\cos 0° = 1$	$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos 60° = \frac{1}{2}$	$\cos 90° = 0$
$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$		$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$		

Површина сфере износи $S = 4\pi R^2$, где је R полупречник сфере.

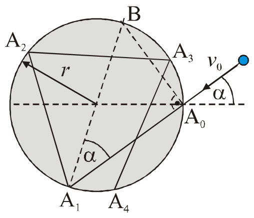
Запремина сфере износи $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, где је R полупречник сфере.



Задатке припремила: *Маја Рабасовић,* Институт за физику, Београд
Рецензент: *др Драган Д. Маркушев,* Институт за физику, Београд
Председник Комисије за такмичење ДФС: *Проф. др Мићо Митровић,*Физички факултет, Београд

P1. При еластичним сударима са зидовима рупе интензитет брзине куглице се не мења. Сударом са зидом рупе вертикална компонента брзине куглице се не мења, а хоризонтална мења смер уз непромењен интензитет. У судару са дном рупе вертикална компонента брзине куглице мења смер а хоризонтална остаје непромењена.

Кретање куглице у рупи може се описати параболом као код косог хица. На слици 1 је приказана пројекција путања куглице на хоризонталну раван. Пошто се интензитет брзине куглице током кретања не мења по хоризонтали, растојања између положаја два узастопна удара куглице о зид су међусобно једнака. С обзиром да су сви троуглови који су уписани у кружницу, и чија једна страна пролази кроз центар кружнице, правоугли (троугао A_0A_1B), следи да је:



Слика 1

$$A_0A_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = ... = 2r_0 \cos\alpha\,, \quad \textbf{(2 п)}$$

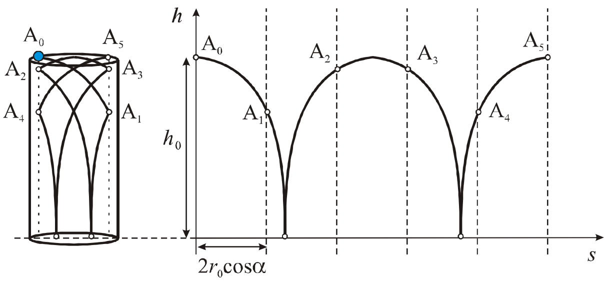
па је време између два узастопна удара једнако:

$$t_1 = \frac{2r_0 \cos\alpha}{v_0}\,. \quad \textbf{(2 п)}$$

Време у току кога куглица дође до дна рупе добија се као:

$$t_2 = \sqrt{\frac{2h_0}{g}}\,. \quad \textbf{(2 п)}$$

График кретања куглице у рупи $h = f(s)$ приказан је на слици 2. По уласку у рупу и по одбијању од дна, куглица се креће по законима косог хица, али се при томе одбија о зидове рупе. Слика "узлазног" кретања куглице је слична "силазној" параболи све дотле док не достигне максималну висину, а онда наставља да се креће поново по "силазној" параболи. Уколико куглица достигне своју максималну висину (висину h_0, односно "врх" рупе) негде између зидова рупе, она ће поново почети да пада, и судараће се са зидовима и дном рупе **(2 п)**. Тек када се деси да куглица достигне максималну висину у тренутку када дође до зида, наћи ће се у ситуацији у којој је била у тачки A_0 **(2 п)**. Растојање по хоризонтали између два узастопна судара, како је приказано на цртежу, нешто је краће од "домета", што значи да је претпостављено да се куглица, било у узлазном или силазном делу путање, само једном судари са зидом **(2 п)**. Из чињенице да се тренутак достизања максималне висине мора поклопити са тренутком доласка до зида рупе, следи да мора бити:



Слика 2

$$nt_1 = 2kt_2\,, \quad \textbf{(4 п)}$$

где си n и k цели бројеви. Заменом израза за дата времена добија се

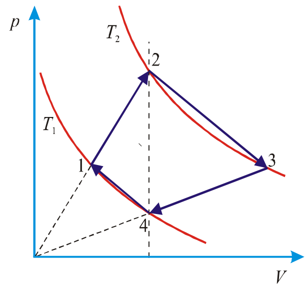
$$n\frac{2r_0\cos\alpha}{v_0} = 2k\sqrt{\frac{2h_0}{g}}\,, \quad \textbf{(2 п)}$$

тј.

$$\boxed{v_0 = \frac{n}{k}\cdot r_0\cos\alpha\cdot\sqrt{\frac{g}{2h_0}}}. \quad \textbf{(2 п)}$$

* * *

P2. Израчунајмо прво радове на деловима 1 – 2 и 3 – 4. За процес 1 – 2 (на $p-V$ дијаграму права пролази кроз координатни почетак па је $p = \alpha V$), рад је једнак површини испод праве 1 – 2:



$$A_{12} = \frac{p_1+p_2}{2}(V_2-V_1) = \frac{p_1V_2 - p_1V_1 + p_2V_2 - p_2V_1}{2} =$$
$$= \frac{\alpha V_1V_2 - p_1V_1 + p_2V_2 - \alpha V_2V_1}{2} = \frac{p_2V_2 - p_1V_1}{2} = \frac{\nu R}{2}(T_2 - T_1). \quad \textbf{(2 п)}$$

За процес 3 – 4 (на $p-V$ дијаграму права пролази кроз координатни почетак па је $p = \beta V$), рад је једнак површини испод праве 3 – 4:

$$A_{34} = \frac{p_3+p_4}{2}(V_3-V_2) = \frac{p_3V_3 - p_3V_2 + p_4V_3 - p_4V_2}{2} =$$
$$\frac{p_3V_3 - \beta V_3V_2 + \beta V_2V_3 - p_4V_2}{2} = \frac{p_3V_3 - p_4V_2}{2} = \frac{\nu R}{2}(T_2 - T_1). \quad \textbf{(2 п)}$$

Видимо да је $A_{12} = A_{34}$. Израчунајмо сада радове A_{23} и A_{41}. За процес 2 – 3 рад је једнак површини испод праве 2 – 3 (уз коришћење једначине изотерме да је $p_2V_2 = p_3V_3 = \nu RT_2$):

$$A_{23} = \frac{p_2+p_3}{2}(V_3-V_2) = \frac{p_2V_3 - p_2V_2 + p_3V_3 - p_3V_2}{2} = \frac{p_2V_3 - RT_2 + RT_2 - p_3V_2}{2} = \frac{p_2V_3 - p_3V_2}{2} =$$
$$= \frac{p_3V_2}{2}\left(\frac{p_2V_3}{p_3V_2} - 1\right) = \frac{p_3V_2}{2}\cdot\frac{V_3}{V_3}\left[\left(\frac{V_3}{V_2}\right)^2 - 1\right] = \frac{\nu RT_2}{2}\cdot\frac{\left(\frac{V_3}{V_2}\right)^2 - 1}{\left(\frac{V_3}{V_2}\right)}. \quad \textbf{(2 п)}$$

Сада треба пронаћи везу између односа запремина V_3 и V_2 и температура T_1 и T_2. Пошто тачке 3 и 4 припадају истој правој $p = \beta V$, онда можемо да пишемо да је $p_3/V_3 = p_4/V_4$, а то је $T_2/V_3^2 = T_1/V_4^2$, што на крају даје $V_3^2/V_2^2 = T_2/T_1$, па је

$$A_{23} = \frac{\nu R T_2}{2} \cdot \frac{\left(\frac{V_3}{V_2}\right)^2 - 1}{\left(\frac{V_3}{V_2}\right)} = \frac{\nu R T_2}{2} \cdot \frac{\frac{T_2}{T_1} - 1}{\sqrt{\frac{T_2}{T_1}}} \text{. } \mathbf{(2\ п)}$$

Аналогно се добија и за A_{41}:

$$A_{41} = \frac{p_4 + p_1}{2}(V_4 - V_1) = \frac{p_4 V_4 - p_4 V_1 + p_1 V_4 - p_1 V_1}{2} = \frac{RT_1 - p_4 V_1 + p_1 V_4 - RT_1}{2} = \frac{p_1 V_4 - p_4 V_1}{2} =$$

$$= \frac{p_4 V_1}{2}\left(\frac{p_1 V_4}{p_4 V_1} - 1\right) = \frac{p_4 V_1}{2} \cdot \frac{V_4}{V_4}\left[\left(\frac{V_4}{V_1}\right)^2 - 1\right] = \frac{\nu R T_1}{2} \cdot \frac{\left(\frac{V_4}{V_1}\right)^2 - 1}{\left(\frac{V_4}{V_1}\right)}$$

тј.

$$A_{41} = \frac{\nu R T_1}{2} \cdot \frac{\left(\frac{V_4}{V_1}\right)^2 - 1}{\left(\frac{V_4}{V_1}\right)} = \frac{\nu R T_1}{2} \cdot \frac{\frac{T_2}{T_1} - 1}{\sqrt{\frac{T_2}{T_1}}} \text{. } \mathbf{(2\ п)}$$

Укупан рад у датом циклусу износи (уз $A_{12} = A_{34}$ **(1 п)** и $A = A_{12} + A_{23} - A_{34} - A_{41}$ **(1 п)**):

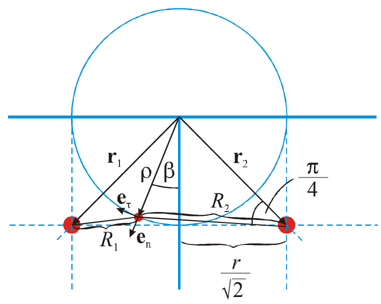
$$\boxed{A = \frac{\nu R T_2}{2} \cdot \frac{\frac{T_2}{T_1} - 1}{\sqrt{\frac{T_2}{T_1}}} - \frac{\nu R T_1}{2} \cdot \frac{\frac{T_2}{T_1} - 1}{\sqrt{\frac{T_2}{T_1}}} = \frac{\nu R (T_2 - T_1)^2}{2\sqrt{T_1 T_2}} = \frac{1\,\mathrm{mol} \cdot 8{,}3 \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol \cdot K}}}{2} \cdot \frac{(300\,\mathrm{K} - 290\,\mathrm{K})^2}{\sqrt{290\,\mathrm{K} \cdot 300\,\mathrm{K}}} \approx 1{,}4\,\mathrm{J}} \text{. } \mathbf{(3\ п)}$$

* * *

P3. а) На негативно наелектрисану честицу ζ (претпоставимо неког наелектрисања q) делују силе (види слику)

$$\mathbf{F}_1 = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0} \frac{q_1 q}{R_1^3} \mathbf{R}_1 \text{, } \mathbf{(2\ п)}$$

$$\mathbf{F}_2 = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0} \frac{q_2 q}{R_2^3} \mathbf{R}_2 \text{. } \mathbf{(2\ п)}$$



Њихова резултанта је $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$. Услов равнотеже је, с’обзиром на деловање реакције у правцу нормале на кружницу (орт $\mathbf{e}_n$), да је $\mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_\tau = 0$, где је $\mathbf{e}_\tau$ орт тангенте на кружница. Дакле,

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{e}_\tau=(\mathbf{F}_1+\mathbf{F}_2)\cdot\mathbf{e}_\tau=\frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\left(\frac{q_1 q}{R_1^3}\mathbf{R}_1\cdot\mathbf{e}_\tau+\frac{q_2 q}{R_2^3}\mathbf{R}_2\cdot\mathbf{e}_\tau\right)=0\text{, } \mathbf{(2\ п)}$$

односно

$$\frac{q_1}{q_2}=-\frac{R_1^3}{R_2^3}\frac{\mathbf{R}_2\cdot\mathbf{e}_\tau}{\mathbf{R}_1\cdot\mathbf{e}_\tau}\text{. } \mathbf{(1\ п)}$$

Како је $\mathbf{R}_\mathrm{i}=\mathbf{r}_\mathrm{i}-\boldsymbol{\rho}$ биће

$$\mathbf{R}_\mathrm{i}\cdot\mathbf{e}_\tau=\mathbf{r}_\mathrm{i}\cdot\mathbf{e}_\tau\text{, и } \mathbf{R}_\mathrm{i}\cdot\mathbf{e}_\mathrm{n}=\mathbf{r}_\mathrm{i}\cdot\mathbf{e}_\mathrm{n}-\rho\text{. } \mathbf{(1\ п)}$$

Са слике се види да је

$$\mathbf{r}_1\cdot\mathbf{e}_\mathrm{n}=r\cos\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)=r\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos\beta+\sin\frac{\pi}{4}\sin\beta\right)=\frac{r}{\sqrt{2}}(\cos\beta+\sin\beta)=\rho(\cos\beta+\sin\beta)\text{, } \mathbf{(0{,}5\ п)}$$

и

$$\mathbf{r}_2\cdot\mathbf{e}_\mathrm{n}=r\cos\left(\frac{\pi}{4}+\beta\right)=\frac{r}{\sqrt{2}}(\cos\beta-\sin\beta)=\rho(\cos\beta-\sin\beta)\text{, } \mathbf{(0{,}5\ п)}$$

као и

$$\mathbf{r}_1\cdot\mathbf{e}_\tau=r\sin\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)=\frac{r}{\sqrt{2}}(\cos\beta-\sin\beta)=\rho(\cos\beta-\sin\beta)\text{, } \mathbf{(0{,}5\ п)}$$

и

$$\mathbf{r}_2\cdot\mathbf{e}_\tau=-r\sin\left(\frac{\pi}{4}+\beta\right)=-\frac{r}{\sqrt{2}}(\cos\beta+\sin\beta)=-\rho(\cos\beta+\sin\beta)\text{. } \mathbf{(0{,}5\ п)}$$

На основу $\mathbf{R}_\mathrm{i}=\mathbf{r}_\mathrm{i}-\boldsymbol{\rho}$ важи и

$$\mathbf{R}_\mathrm{i}=\mathbf{r}_\mathrm{i}-\boldsymbol{\rho}=(\mathbf{r}_\mathrm{i}\cdot\mathbf{e}_\mathrm{n})\mathbf{e}_\mathrm{n}+(\mathbf{r}_\mathrm{i}\cdot\mathbf{e}_\tau)\mathbf{e}_\tau-(\boldsymbol{\rho}\cdot\mathbf{e}_\mathrm{n})\mathbf{e}_\mathrm{n}=(\mathbf{r}_\mathrm{i}\cdot\mathbf{e}_\mathrm{n}-\rho)\mathbf{e}_\mathrm{n}+(\mathbf{r}_\mathrm{i}\cdot\mathbf{e}_\tau)\mathbf{e}_\tau\text{, } \mathbf{(0{,}5\ п)}$$

па је

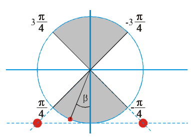
$$R_\mathrm{i}^2=(\mathbf{r}_\mathrm{i}\cdot\mathbf{e}_\mathrm{n}-\rho)^2+(\mathbf{r}_\mathrm{i}\cdot\mathbf{e}_\tau)^2\text{, } \mathbf{(0{,}5\ п)}$$

тако да се услов равнотеже своди на

$$\frac{q_1}{q_2}=-\frac{R_1^3}{R_2^3}\frac{\mathbf{R}_2\cdot\mathbf{e}_\tau}{\mathbf{R}_1\cdot\mathbf{e}_\tau}=\frac{\mathbf{r}_2\cdot\mathbf{e}_\tau}{\mathbf{r}_1\cdot\mathbf{e}_\tau}\cdot\frac{\left[(\mathbf{r}_1\cdot\mathbf{e}_\mathrm{n}-\rho)^2+(\mathbf{r}_1\cdot\mathbf{e}_\tau)^2\right]^{3/2}}{\left[(\mathbf{r}_2\cdot\mathbf{e}_\mathrm{n}-\rho)^2+(\mathbf{r}_2\cdot\mathbf{e}_\tau)^2\right]^{3/2}}\text{, } \mathbf{(1\ п)}$$

односно општи израз за однос q_1/q_2 као функција угла β је

$$\boxed{\frac{q_1}{q_2}=\frac{\cos\beta+\sin\beta}{\cos\beta-\sin\beta}\cdot\left(\frac{3-2(\cos\beta+\sin\beta)}{3-2(\cos\beta-\sin\beta)}\right)^{3/2},\beta\in\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)\cup\left(3\frac{\pi}{4},-3\frac{\pi}{4}\right)}\text{. } \mathbf{(2\ п)}$$



б) *Варијанта I*: Ако искористимо претпоставку да је β мали угао и узмемо у обзир да је $\beta \ll 1$, налазимо из последњег израза да је, уз $\cos\beta\approx 1$ и $\sin\beta\approx\beta$,

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{1+\beta}{1-\beta} \cdot \frac{[3-2(1+\beta)]^{3/2}}{[3-2(1-\beta)]^{3/2}} = \frac{1+\beta}{1-\beta} \cdot \left(\frac{1-2\beta}{1+2\beta}\right)^{3/2} = (1+2\beta)(1-4\beta)^{3/2}\text{, } \mathbf{(3\ п)}$$

што уз $(1-4\beta)^{3/2} \approx (1-6\beta)$ и занемаривање величина реда β^2 даје

$$\boxed{\frac{q_1}{q_2} \approx (1+2\beta)(1-6\beta) = 1-4\beta}\text{. } \mathbf{(3\ п)}$$

За оне који имају проблем са недостатком концентације постоји и једноставнија

Варијанта II: По успостављању равнотеже интензитети сила F_1 и F_2 који делују на честицу морају бити једнаки, тј:

$$\frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\frac{q_1 q}{R_1^2} = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\frac{q_2 q}{R_2^2}\text{, } \mathbf{(2\ п)}$$

одакле следи да је

$$\boxed{\frac{q_1}{q_2} = \frac{R_1^2}{R_2^2} \approx \frac{(\rho(1-\sin\beta))^2}{(\rho(1+\sin\beta))^2} \approx \left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)^2 = \left(1-\frac{2\beta}{1+\beta}\right)^2 \approx 1-4\beta}\text{. } \mathbf{(4\ п)}$$

* * *

P4. Опште решење овог задатка може се добити на следећи начин. У суду запремине $V = 1\,\mathrm{m}^3$ се налази смеша гасова хелијума и кисеоника, од чега ν_1 молова хелијума и ν_2 молова кисеоника. На температури T и притиску p укупан број молова је

$$\nu = \nu_1 + \nu_2 = \frac{pV}{RT}\text{. } \mathbf{(1\ п)}$$

Маса смеше гасова у датој запремини износи

$$m = m_1 + m_2 = M_{\mathrm{He}}\nu_1 + M_{\mathrm{O_2}}\nu_2 = \rho V\text{, } \mathbf{(1\ п)}$$

где је густина смеше означена са ρ. Ако сада из суда уклонимо део молекула кисеоника онда ће укупан број молова у смеши тада бити $\nu' = \nu_1 + \nu'_2$ ($\nu_1 = const.$) **(1 п)**. Уз $T, V = const.$ притисак смеше ће се, по уклањању дела молекула кисеоника, променити и биће једнак p'. Његова вредност се може израчунати користећи се односом

$$\frac{p}{p'} = \frac{\nu}{\nu'}\text{, } \mathbf{(1\ п)}$$

што даје

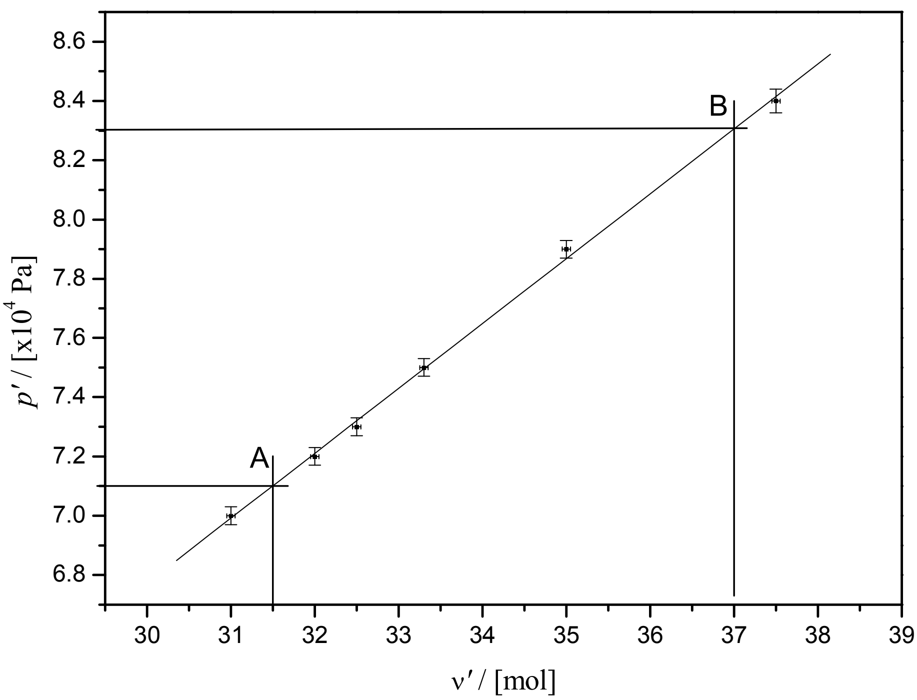
$$p' = \frac{p}{\nu}\nu' = k \cdot \nu', \ \textbf{(1 п)}$$

где је $k = \dfrac{p}{\nu} = \dfrac{RT}{V}$ коефицијент правца праве графика добијеног на основу података из поставке задатка . График се црта на основу табеле **(1 п)**

$(p' \pm \Delta p')/[10^4\,\mathrm{Pa}]$	7,00±0,05	7,20±0,05	7,30±0,05	7,50±0,05	7,90±0,05	8,40±0,05
$(\nu' \pm \Delta\nu')/[\mathrm{mol}]$	31,00±0,03	32,00±0,03	32.50±0,04	33.30±0,04	35,00±0,04	37,50±0,04

где су грешке за ν' израчунате на основу услова задатка $\delta\nu' = 0{,}1\,\%$.

График зависности притиска смеше p' од броја молова смеше ν'



(4 п)

Када нацртамо поменути график, узмемо две тачке са праве и то тако да прву тачку узимамо између прве две **(0,5 п)** A(31,5 mol, 7,1 x10^4 Pa), а другу између последње две експерименталне тачке **(0,5 п)** B(37,0 mol, 8,3 x10^4 Pa). На основу њих добијамо коефицијент правца праве

$$k = \frac{\Delta p'}{\Delta \nu'} = \frac{p'_{\mathrm{B}} - p'_{\mathrm{A}}}{\nu'_{\mathrm{B}} - \nu'_{\mathrm{A}}} = \frac{(8{,}3 - 7{,}1)}{(37{,}0 - 31{,}5)} \frac{\times 10^4\ \mathrm{Pa}}{\mathrm{mol}} = \frac{1{,}2}{5{,}5} \frac{\times 10^4\ \mathrm{Pa}}{\mathrm{mol}} = 2{,}18 \times 10^3\ \frac{\mathrm{Pa}}{\mathrm{mol}}.\ \textbf{(1 п)}$$

Грешка коефицијента правца износи

$$\Delta k = k\left(\frac{\Delta p'_{\mathrm{A}} + \Delta p'_{\mathrm{B}}}{p'_{\mathrm{B}} - p'_{\mathrm{A}}} + \frac{\Delta \nu'_{\mathrm{A}} + \Delta \nu'_{\mathrm{B}}}{\nu'_{\mathrm{B}} - \nu'_{\mathrm{A}}}\right) = 2{,}18 \times 10^3\ \frac{\mathrm{Pa}}{\mathrm{mol}}\left(\frac{0{,}05 + 0{,}05}{1{,}2} + \frac{0{,}03 + 0{,}04}{5{,}5}\right) = 2{,}1 \times 10^2\ \frac{\mathrm{Pa}}{\mathrm{mol}}.\ \textbf{(1 п)}$$

Сада је

$$\boxed{k = (2{,}2 \pm 0{,}2) \times 10^3 \ \frac{\mathrm{Pa}}{\mathrm{mol}}}$$ **(1 п)**

Сада се, на основу $k = \frac{p}{\nu} = \frac{RT}{V}$ може израчунати температура смеше као

$$T = \frac{kV}{R} = \frac{2{,}18 \times 10^3 \ \frac{\mathrm{Pa}}{\mathrm{mol}} \cdot 1\,\mathrm{m}^3}{8{,}3 \ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol} \cdot \mathrm{K}}} = 262{,}65\ \mathrm{K}\,.$$ **(1 п)**

Грешка за овако израчунату температуру износи

$$\Delta T = T\left(\frac{\Delta k}{k}\right) = 262{,}65\ \mathrm{K} \cdot \left(\frac{0{,}2}{2{,}2}\right) = 23{,}87\ \mathrm{K}\,,$$ **(1 п)**

па је на крају

$$\boxed{T = (260 \pm 30)\mathrm{K}}$$ **(1 п)**

По услову задатка се зна да је за вредност $\nu' = 35\ \mathrm{mol}$ из смеше уклоњена половина од почетног броја молекула кисеоника. То значи да је

$$\nu' = \nu_1 + \nu'_2 = \nu_1 + \frac{\nu_2}{2} = 35\ \mathrm{mol}\,.$$

Искористивши $\nu_1 / \nu_2 = 3$, имамо

$$\nu = \nu_1 + \nu_2 = 3\nu_2 + \nu_2 = 4\nu_2\,,$$

па имамо две једначине чијим решавањем добијамо да је $\nu_2 = 10\ \mathrm{mol}$, $\nu_1 = 30\ \mathrm{mol}$ и $\nu = 40\ \mathrm{mol}$. Из услова задатка следи да је $\Delta\nu' = \Delta\nu'_2$, а потом да је $\Delta\nu'_2 = \Delta\nu_2$, што на крају даје $\delta\nu_2 = \delta\nu_1$ $(\nu_1 / \nu_2 = 3)$. Сада можемо да напишемо да је

$$\boxed{\nu_2 = (10{,}00 \pm 0{,}04)\,\mathrm{mol}} \text{ и } \boxed{\nu_1 = (30{,}0 \pm 0{,}1)\,\mathrm{mol}},$$ **(1 п)**

и

$$\Delta\nu = \Delta\nu_1 + \Delta\nu_2 = 0{,}04\ \mathrm{mol} + 0{,}10\ \mathrm{mol} = 0{,}14\ \mathrm{mol}\,,$$ **(0,5 п)**

тј.

$$\boxed{\nu = (40{,}0 \pm 0{,}2)\,\mathrm{mol}}.$$ **(0,5 п)**

Добијене вредности почетног броја молова кисеоника и хелијума искористимо за израчунавање почетне густине смеше

$$\rho = \frac{M_{He}\nu_1 + M_{O_2}\nu_2}{V} = \frac{4\times10^{-3}\,\frac{kg}{mol}\cdot 30\,mol + 32\times10^{-3}\,\frac{kg}{mol}\cdot 10\,mol}{1\,m^3} = 0{,}440\frac{kg}{m^3}.\ \textbf{(1 п)}$$

Грешка густине смеше се израчунава као

$$\Delta\rho = \rho\cdot\left(\frac{M_{He}\Delta\nu_1 + M_{O_2}\Delta\nu_2}{M_{He}\nu_1 + M_{O_2}\nu_2}\right) = 0{,}44\frac{kg}{m^3}\cdot\frac{1{,}68\times10^{-3}}{0{,}44} = 1{,}7\times10^{-3}\frac{kg}{m^3},\ \textbf{(1 п)}$$

па је

$$\boxed{\rho = (440\pm2)\cdot10^{-3}\frac{kg}{m^3}}.\ \textbf{(1 п)}$$

На основу $p = \nu\frac{RT}{V}$ може се израчунати притисак смеше као

$$p = \nu\frac{RT}{V} = 40\,mol\cdot\frac{8{,}3\frac{J}{mol\cdot K}\cdot 262{,}65\cdot K}{1\,m^3} = 8{,}719\times10^4\,Pa.\ \textbf{(1 п)}$$

Грешка за овако израчунати притисак износи

$$\Delta p = p\left(\frac{\Delta T}{T} + \frac{\Delta\nu}{\nu}\right) = 8{,}719\times10^4\,Pa\cdot\left(\frac{30}{260} + \frac{0{,}2}{40}\right) \approx 1{,}05\times10^4\,Pa,\ \textbf{(1 п)}$$

па је на крају

$$\boxed{p = (9\pm1)\times10^4\,Pa}\ \textbf{(1 п)}$$

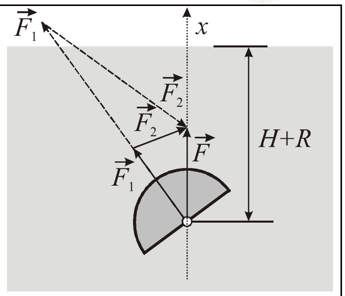
* * *

P5. Један од могућих начина решавања овог задатка је следећи: Посматрајмо тело које има форму полусфере полупречника R. Претпоставимо да се то тело налази потопљено у течности густине ρ и да је оријентисано у простору на исти начин као и испупчење у датом суду. Сагласно Архимедовом закону, на то тело делује сила потиска $\mathbf{F}$ која тежи да га избаци на површину течности, а усмерена је вертикално навише и по интензитету је једнака

$$F = \rho g V = \rho g\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{2}{3}\rho g\pi R^3.\ \textbf{(2 п)}$$

Са друге стране, ову силу $\mathbf{F}$ можемо схватити и као збир две силе потиска на тело од стране течности: силе $\mathbf{F}_1$ која делује на читаву "основу" ове полусфере **(1 п)**, и силу $\mathbf{F}_2$ која делује на читаву закривљену бочну површину полусфере **(1 п)**, тј.

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2.\ \textbf{(1 п)}$$



На слици су приказана два могућа случаја слагања ове две силе. Нас интересује пројекција силе $\mathbf{F}_2$ на вертикалну осу (означимо ту осу са x и усмеримо је ка врху, као на слици), па су могуће комбинације:

$$F_{2x} = F - F_{1x} = F_{v\uparrow},$$ (усмерена ка површини воде) **(1 п)**

или

$$F_{2x} = F_{1x} - F = F_{v\downarrow},$$ (усмерена ка дну суда) **(1 п)**

у зависности од претпостављеног смера F_{2x}. Да би пронашли интензитет и пројекцију силе $\mathbf{F}_1$ подсетимо се да притисак p у течности расте линеарно са њеном дубином, и да и због геометрије тела можемо користити његову средњу вредност $< p >$ па добијамо

$$F_1 = < p > S = \rho g (H + R) \pi R^2,$$ **(2 п)**

и

$$F_{1x} = \rho g (H + R) \pi R^2 \cos\alpha.$$ **(1 п)**

Сада за тражену пројекцију силе $\mathbf{F}_2$ добијамо, у првом случају

$$F_{v\uparrow} = \frac{2}{3}\rho g \pi R^3 - \rho g (H + R) \pi R^2 \cos\alpha,$$

а у другом случају **(2 п)**

$$F_{v\downarrow} = \rho g (H + R) \pi R^2 \cos\alpha - \frac{2}{3}\rho g \pi R^3.$$

Заменом услова задатка да је $H = 2R$ добија се у првом случају

$$\boxed{F_{v\uparrow} = \rho g \pi R^3 \left(\frac{2}{3} - 3\cos\alpha\right)},$$

а у другом случају **(1 п)**

$$\boxed{F_{v\downarrow} = \rho g \pi R^3 \left(3\cos\alpha - \frac{2}{3}\right)}.$$

Први случај, када је сила усмерена ка површини воде, важи за све углове код којих је $\left(\frac{2}{3} - 3\cos\alpha\right) > 0$, тј. за $\cos\alpha < \frac{2}{9}$, што важи за углове $\alpha > 77°$ **(2 п)**. Аналогно томе, други случај, када је сила усмерена ка дну суда, важи за све углове $\alpha < 77°$ **(2 п)**. За тражени угао а) $\boxed{\alpha = 40° \Rightarrow F_v = F_{v\downarrow}}$ **(1 п)**, б) $\boxed{\alpha = 60° \Rightarrow F_v = F_{v\downarrow}}$ **(1 п)**, в) $\boxed{\alpha = 80° \Rightarrow F_v = F_{v\uparrow}}$ **(1 п).**

* * *