

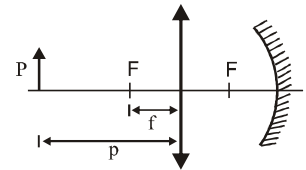


I РАЗРЕД

Друштво Физичара Србије  
Министарство Просвете Републике Србије  
ЗАДАЦИ

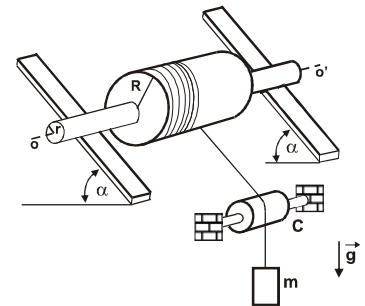
VIII ГИМНАЗИЈА  
БЕОГРАД  
04.04.2009.

1. Танко сабирно сочиво налази се у центру кривине конкавног (удубљеног) сферног огледала тако да им се оптичке осе поклапају (слика 1). Жижна даљина сочива је једнака жижној даљини конкавног огледала и износи  $f$ . Усправан светао предмет величине  $P = 2\text{ cm}$  налази се на оптичкој осу удаљен  $p = 3f$  од сочива. Конструисати коначан лик предмета и скицирати одговарајући график (график детаљно објаснити!). Одредити величину коначног лика предмета. Да ли је коначан лик усправан или изврнут? (15п)



Слика 1.

2. На хомогено цилиндрично тело, полупречника  $R = 30\text{ cm}$ , намотан је неистегљиви конач занемарљиве масе. Осовина тела, полупречника  $r = 10\text{ cm}$ , може да се котрља без клизања по међусобно паралелним шинама које са хоризонталном равни заклапају угао  $\alpha = 30^\circ$  (слика 2). Слободни крај конца, паралелан је са шинама и пребачен је преко катура С (који може да ротира око своје фиксне осе ротације), а на његовом крају visi тег масе  $m$ . Маса цилиндричног тела са осовином је  $M = 100\text{ kg}$ , а њихов момент инерције у односу на осу  $OO'$  је  $I = 3\text{ kgm}^2$ .



Слика 2.

- а) Колика мора бити маса тега  $m$  да би цео систем, препуштен сам себи, мировао? (16п)  
 б) Ако је маса тега  $m = 45\text{ kg}$  и цео систем се почне кретати из стања мировања, одредити брзину центра масе цилиндричног тела у тренутку када се тег налази  $0,49\text{ m}$  испод почетног положаја. За убрзање Земљине теже узети  $g = 10\text{ m/s}^2$ . (4п)

3. Размотримо кретање неког возила помоћу једноставног модела приказаног на слици 3. Модел који представља возило састоји се од каросерије укупне масе  $M$  (хомогени правоугаоник дужине  $L$ , висине  $h$ , са два носача дужине  $R$  којим је повезан са осовинама точкова) и два точка. Точкови (предњи и задњи) су идентични, хомогени, сваки масе  $m$  и радијуса  $R$ . Трење у осовини точкова се може занемарити. Да би се возило успорило возач може да примени кочницу, односно да делује хоризонталном силом на врх предњег точка (слика 3). Претпоставимо да се возило креће равномерно праволинијски и посматрајмо тренутак када се примени кочница тако да возило почне да се креће равномерно успорено са успорењем интензитета  $a$ . Сматрајући да нема проклизавања точкова по подлози, одредити:



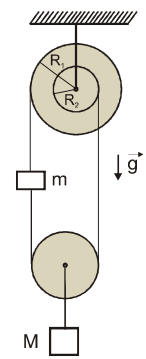
Слика 3.

- а) силу трења између подлоге и задњег точка (3п)  
 б) хоризонталну компоненту силе којом каросерија делује на осовину задњег точка (3п)  
 в) силу трења између подлоге и предњег точка (3п)  
 г) силу кочења која је примењена на врх предњег точка (3п)  
 д) хоризонталну компоненту силе којом каросерија делује на осовину предњег точка (3п)  
 ђ) силу нормалне реакције подлоге на предњи точак и силу нормалне реакције подлоге на задњи точак (10п)



4. У систему приказаном на слици 4 горњи котур састоји се из два међусобно причвршћена диска полупречника  $R_1$  и  $R_2 = R_1/2$ , који могу да ротирају око заједничке осе симетрије која пролази кроз њихов центар. Један крај безмасене, неистегљиве нити намотан је око једног диска горњег котура, а други крај нити око другог диска горњег котура (видети слику 4). Оба котура (и горњи и доњи) имају занемарљиве масе, а трење у осовини котура може да се занемари. Сматрати да је нит у сваком тренутку вертикална и да нема проклизавања нити. Одредити убрзања блокова, чије су масе  $m$  и  $M$ , ако је систем почео да се креће из стања мировања.

(20п)

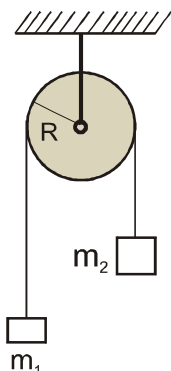


Слика 4.

5. Британски научник George Atwood први је користио систем приказан на слици 5 и по њему је овакав систем добио назив Атвудова машина. Извршен је експеримент у коме је Атвудова машина послужила за одређивање момента инерције котура радијуса  $R = 15\text{ cm}$  и одређивање момента силе трења у осовини котура. Неистегљива нит, занемарљиве масе, пребачена је преко котура који може да ротира око своје осе симетрије као на слици 5. За слободне крајеве нити се закаче тегови масе  $m_1$  и  $m_2$  тако да систем почне да се креће из стања мировања. Вршена су мерења убрзања система за пет различитих парова тегова маса  $m_1$  и  $m_2$ . За сваки пар тегова убрзање је мерено три пута. У табели 1 су представљени резултати мерења. За убрзање Земљине теже узети  $g = 9,81\text{ m/s}^2$ . Ради једноставности занемарити грешке мерења радијуса котура, убрзања Земљине теже и маса тегова. За грешку одређивања убрзања узети  $0,001\text{ m/s}^2$ . Сматрати да је момент силе трења у осовини котура константна величина и да нема проклизавања конца.

Табела 1.

Број мерења	$m_1$ [ g ]	$m_2$ [ g ]	$a_1$ [ m/s <sup>2</sup> ]	$a_2$ [ m/s <sup>2</sup> ]	$a_3$ [ m/s <sup>2</sup> ]
1	199	201	0.027	0.027	0.028
2	198	202	0.062	0.064	0.061
3	197	203	0.098	0.099	0.098
4	196	204	0.134	0.135	0.133
5	195	205	0.168	0.171	0.169



Слика 5.

а) Наћи теоријску зависност између мерених физичких величина

б) Нацртати одговарајући график

в) Графичком методом одредити момент инерције котура и момент силе трења у осовини. Проценити само грешку одређивања момента силе трења.

(20п)

Задатке припремио: *др Зоран Мијић*, Институт за физику, Београд

Рецензент: *Проф. др Александар Срећковић*, Физички факултет, Београд

Председник Комисије за такмичење ДФС: *Проф. др Мићо Митровић*, Физички факултет, Београд

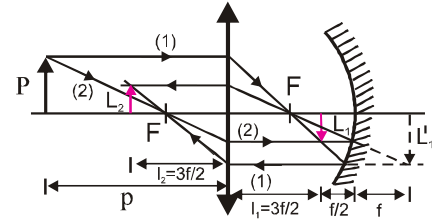


I РАЗРЕД

Друштво Физичара Србије  
Министарство Просвете Републике Србије  
РЕШЕЊА ЗАДАТАКА

VIII ГИМНАЗИЈА  
БЕОГРАД  
04.04.2009.

**P1.** На слици 1 је приказана конструкција коначног lika предмета. Очигледно је да се зраци који пролазе кроз сочиво, рефлектују од огледала и поново пролазе кроз сочиво образујући коначан реалан и усправан лик  $L_2$ . Након првог проласка зрака кроз сочиво настаје реалан изврнут лик предмета  $L_1$  на растојању  $\frac{1}{l_1} = \frac{1}{f} - \frac{1}{p} \Rightarrow l_1 = \frac{3}{2}f$  (2п) од сочива и величине



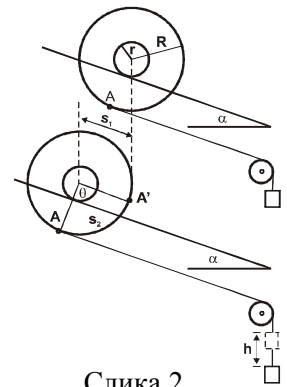
Слика 1.

огледала па његовом рефлексијом у огледалу добија се виртуелни лик  $L'_1$  на растојању  $\frac{1}{f} = \frac{1}{f/2} - \frac{1}{l'_1} \Rightarrow l'_1 = f$  (1п) од центра огледала и величине  $L'_1 = \frac{l'_1}{f/2} L_1 = 2\text{ cm}$  (1п). Растојање имагинарног

лика  $L'_1$  од сочива је  $3f$  па је растојање коначног lika предмета од сочива  $\frac{1}{l_2} = \frac{1}{f} - \frac{1}{3f} \Rightarrow l_2 = \frac{3}{2}f$  (2п), а његова величина  $L_2 = \frac{3f/2}{3f} L'_1 = 1\text{ cm}$  (2п). Тачно нацртана и објашњена слика 1 вреди (6п).

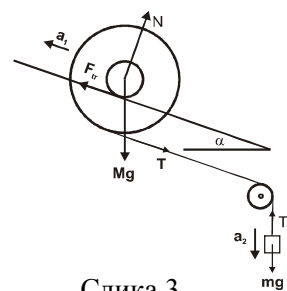
**P2. a)** Ако се цилиндрично тело котрља на горе, без проклизавања, конач се одмотава и обрнуто, конач се намотава ако се тело креће на доле. Када центар масе цилиндричног тела пређе на горе пут  $s_1$ , обзиром да нема проклизавања изврши се угаоно померање за угао  $\theta$  тако да је  $s_1 = r\theta$  (1п) (слика 2). Дужина конца  $s_2$  који се при томе одмота са цилиндра полупречника  $R$  је  $s_2 = R\theta$  (1п).

Из претходног се закључује да важи  $s_2 = s_1 \frac{R}{r}$ , а како је  $R > r$  значи и да је  $s_2 > s_1$  што значи да се крај конца заједно са тегом спушта када се цилиндар подиже и обратно, када се цилиндар спушта тег се подиже. Дакле, ако се центар масе цилиндра помери на горе за  $s_1$  и при томе се одмота конач дужине  $s_2$ , тег се спусти за  $h = s_2 - s_1 \Rightarrow h = s_1 \left( \frac{R}{r} - 1 \right)$  (2п). Ако претпоставимо да се



Слика 2.

цилиндрично тело креће на горе једначине кретања су  $Ma_1 = F_r - T - Mg/2$  (2п), (за кретање тела дуж шине) и  $ma_2 = mg - T$  (2п) (за тег масе  $m$ ) где је  $T$ - сила затезања конца, а  $F_r$  сила трења. Очигледно су убрзања тега и цилиндричног тела константна и међусобно различита (пошто прелазе за исто време различите путеве, а не постоји почетна брзина) па важи  $s_1 = a_1 t^2 / 2$  и  $h = a_2 t^2 / 2$  одакле се лако налази веза међу убрзањима  $a_2 = a_1 \left( \frac{R}{r} - 1 \right)$  (2п). Цилиндрично тело и



Слика 3.

ротира (котрља се уз шине) па важи  $I\alpha = TR - F_r r$  (2п) где је  $I$  момент инерције цилиндричног тела, а  $\alpha = a_1 / r$  угаоно убрзање тела (јер нема проклизавања). Комбиновањем претходних једначина за убрзање

цилиндричног тела се добија  $a_1 = g \frac{m(R/r-1) - M/2}{M + m(R/r-1)^2 + \frac{I}{r^2}}$  (2п). Када систем мирује  $a_1 = 0$  па из претходне

једначине следи да у том случају мора да важи  $m_0 = \frac{M/2}{R/r-1} = 25\text{ kg}$  (2п) што је тражена маса тега.

б) Из претходног се закључује да за  $m > m_0$   $a_1 > 0$  тј. цилиндрично тело се креће на више убрзањем  $a_1$

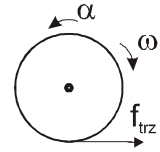


**47. РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ ФИЗИКЕ**  
**УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА ШКОЛСКЕ 2008/2009. ГОДИНЕ**



док се тег спушта. Брзина тела после преласка пута  $s_1$  је  $v = \sqrt{2a_1 s_1}$ , а како је  $s_1 = h \left( \frac{r}{R-r} \right)$  и узимајући у обзир једначину за  $a_1$  изведену у првом делу задатка за тражену брзину тела у зависности од померања тега  $h$  се коначно добија  $v = \sqrt{2gh \frac{m(R/r-1) - M/2}{M + m(R/r-1)^2 + I/r^2} \cdot \frac{r}{(R-r)}} \approx 0,58 \text{ m/s}$  (4п)

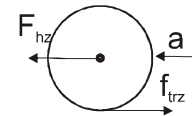
**Р3. а)** Задњи точак се окреће у смеру казаљке на сату, али након примене кочнице возило успорава па је смер угаоног убрзања  $\alpha$  задњег точка као на слици 4. Сила трења  $f_{trz}$ , чији момент изазива угаоно успорење, мора бити усмерена ка предњем точку па како је  $I = \frac{1}{2} mR^2$  момент инерције диска и  $a = \alpha R$  (1п) (нема проклизавања точка) важи



Слика 4.

$I\alpha = f_{trz} R$  (1п) одакле следи  $f_{trz} = \frac{1}{2} ma$  (1п).

б) Посматрајмо транслаторно успорење задњег точка. Како возило успорава, сила којом осовина делује на задњи точак  $F_{hz}$  мора да има смер као на слици 5 па важи



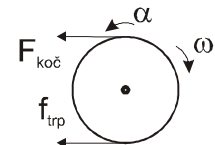
Слика 5.

$ma = F_{hz} - f_{trz}$  (2п) одакле је тражена сила  $F_{hz} = \frac{3}{2} ma$  (1п).

в) Посматрајмо кретање возила као целине (систем каросерија заједно са точковима) укупне масе  $M + 2m$ . Једине спољашње силе које делују на возило су силе трења са подлогом па пошто је претходно одређен смер силе трења  $f_{trz}$ , за кретање система као целине мора да важи  $(M + 2m)a = f_{trp} - f_{trz}$  (2п) одакле се налази тражена сила трења између предњег точка и подлоге

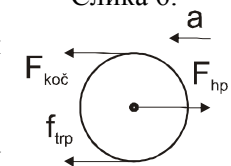
$f_{trp} = (M + \frac{5}{2}m)a$  (1п).

з) Посматрајмо ротационо кретање предњег точка око своје осе (слика 6). Кочница делује силом усмереном ка задњем делу тако да је  $I\alpha = (F_{koc} - f_{trp})R$  (2п) одакле се налази тражена сила  $F_{koc} = (M + 3m)a$  (1п)



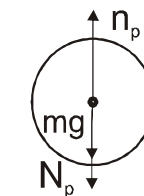
Слика 6.

д) Транслаторно кретање предњег точка (слика 7) описано је једначином  $ma = F_{koc} + f_{trp} - F_{hp}$  (2п) одакле се налази  $F_{hp} = (2M + \frac{9}{2}m)a$  (1п)



Слика 7.

ђ) На слици 8 приказане су силе које делују на предњи точак у вертикалном правцу (сила Земљине теже  $mg$ , тражена сила реакције подлоге  $n_p$  и сила којом каросерија



Слика 8.

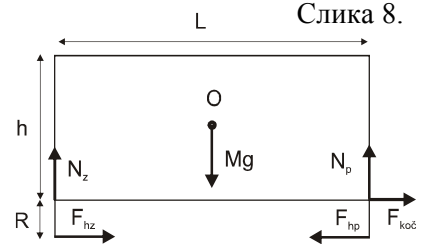
делује на осовину точка  $N_p$ ). Пошто нема кретања по вертикалном правцу за предњи точак мора да важи  $n_p - N_p - mg = 0$  (1п). (слично важи и за задњи точак  $n_z - N_z - mg = 0$ ). Да бисмо одредили силе реакције подлоге потребно је прво да нађемо силе  $N_p$  и  $N_z$  ( $N_z$  и  $N_p$  силе интеракције каросерије са осовином задњег и предњег точка). У том циљу, имајући у виду решења која су добијена за поједине силе у претходном делу задатка и користећи III Њутнов закон, можемо нацртати све силе које делују на каросерију возила (слика 9). Пошто нема кретања у вертикалном правцу важи  $Mg = N_z + N_p$  (1п). Такође, пошто нема ротације сума свих момената сила које делују на каросерију, у односу на центар масе (тачка О, слика 9) је једнака нули тј.

$F_{hz} \left( \frac{h}{2} + R \right) + F_{koc} \frac{h}{2} + N_p \frac{L}{2} - N_z \frac{L}{2} - F_{hp} \left( \frac{h}{2} + R \right) = 0$  (2п). Из претходних

једначина се налази  $N_p = \frac{1}{2} Mg + \frac{ah}{2L} M + \frac{aR}{L} (2M + 3m)$  (1п) и

$N_z = \frac{1}{2} Mg - \frac{ah}{2L} M - \frac{aR}{L} (2M + 3m)$  (1п). Коначно тражена реакција

подлоге на предњи точак је:



Слика 9.



**47. РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ ФИЗИКЕ**  
**УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА ШКОЛСКЕ 2008/2009. ГОДИНЕ**



$$n_p = mg + N_p \Rightarrow n_p = \frac{1}{2}(M + 2m)g + \frac{ah}{2L}M + \frac{aR}{L}(2M + 3m) \text{ (2п)}, \text{ а реакција подлоге на задњи точак је}$$

$$n_z = mg + N_z \Rightarrow n_z = \frac{1}{2}(M + 2m)g - \frac{ah}{2L}M - \frac{aR}{L}(2M + 3m) \text{ (2п)}.$$

**P4.** Према услову задатка масе котурова су занемарљиве па из једначине за ротацију горњег котура  $I\alpha = T_1R_1 - T_2R_2$  (1п), (имајући у виду да је  $I \approx 0$ ) следи  $T_1R_1 = T_2R_2$  (2п) односно  $T_2 = 2T_1$  (1п) (слика 5). Претпоставимо да се горњи котур обрне супротно

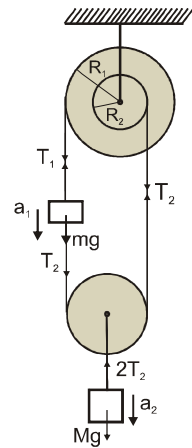
смеру казаљке на сату за угао  $\beta$ , тада се са већег диска одмота део конца дужине  $R_1\beta$  (за ту дужину се спусти и блок масе  $m$ ), док се истовремено на мањи диск намота део конца дужине  $R_2\beta$ . То значи да се доњи котур, односно тег масе  $M$ , спусти за

$$h = \frac{R_1\beta - R_2\beta}{2} = \frac{R_1\beta}{4} \text{ (3п)}. \text{ Како је систем кренуо из стања мировања важи } R_1\beta = \frac{a_1t^2}{2}$$

(1п) и  $h = \frac{a_2t^2}{2}$  (1п) одакле се лако налази  $a_1 = 4a_2$  (3п). Једначине кретања блокова су

$$ma_1 = mg + T_2 - T_1 \text{ (2п)} \text{ и } Ma_2 = Mg - 2T_2 \text{ (2п)}. \text{ Решавањем претходних једначина}$$

$$\text{налазе се тражена убрзања } a_1 = g \frac{M + 4m}{M/4 + 4m} \text{ (2п)} \text{ и } a_2 = g \frac{M + 4m}{M + 16m} \text{ (2п)}.$$



Слика 5.

**P5.** Пошто је конач неистегљив и нема проклизавања тегови се крећу са истим убрзањем  $a$  при чему важи  $m_1a = T_1 - m_1g$  (1п) и  $m_2a = m_2g - T_2$  (1п) ( $T_1$  и  $T_2$  су одговарајуће силе затезања конца).

Ротационо кретање котура је описано једначином  $I\alpha = (T_2 - T_1)R - M_{tr}$  (1п) где је  $I$  тражени момент инерције котура у односу на осу ротације,  $M_{tr}$  тражени момент силе трења у осовини котура, а  $\alpha = a/R$  угаоно убрзање котура. У табели 1 дати су резултати мерења. Из претходних једначина налази се

линеарна зависност међу мереним убрзањима и разлике у масама примењених тегова

$$(m_2 - m_1) = \frac{1}{g} \left( m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2} \right) a + \frac{M_{tr}}{Rg} \text{ (3п)}. \text{ Зависност је облика } (m_2 - m_1) = ka + b \text{ па се графичкиом методом}$$

може одредити коефицијент правца  $k = (m_1 + m_2 + I/R^2)/g$  (1п) и одсечак на  $y$  оси  $b = M_{tr}/Rg$  (1п).

Табела 1.

Број мерења	$m_2$ [g]	$m_1$ [g]	$m_2 - m_1$ [g]	$a_i$ [m/s <sup>2</sup> ]	$a_s$ [m/s <sup>2</sup> ]	$\Delta a$ [m/s <sup>2</sup> ]
1	201	199	2	0.027	0.0273 0.027	0.00067 0.001
				0.027		
				0.028		
2	202	198	4	0.062	0.0623 0.062	0.0016 0.002
				0.064		
				0.061		
3	203	197	6	0.098	0.0983 0.098	0.00067 0.001
				0.099		
				0.098		
4	204	196	8	0.134	0.1340 0.134	0.001
				0.135		
				0.133		
5	205	195	10	0.168	0.1693 0.169	0.0016 0.002
				0.171		
				0.169		



**47. РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ ФИЗИКЕ  
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА ШКОЛСКЕ 2008/2009. ГОДИНЕ**



Треба приметити да је збир маса тегова за свако мерење исти па су и коефицијент правца  $k$  и момент силе трења константне величине. На слици 6 приказан је одговарајући график са кога избором две неексперименталне тачке нпр.  $A(0,03 \text{ m/s}^2; 2,16 \text{ g})$  и  $B(0,147 \text{ m/s}^2; 8,72 \text{ g})$  са одговарајуће праве израчунава коефицијент правца  $k = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \Rightarrow k = 56,068 \text{ g s}^2/\text{m}$ . Релативна грешка је

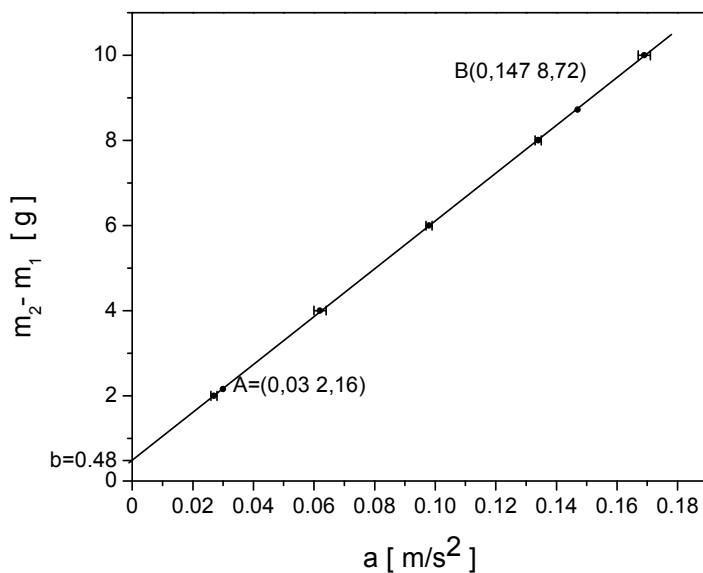
$$\frac{\Delta k}{k} = \frac{\Delta y_B + \Delta y_A}{y_B - y_A} + \frac{\Delta x_B + \Delta x_A}{x_B - x_A} \frac{\Delta k}{k} = 0,0273 \Rightarrow \Delta k = 1,5 \text{ g s}^2/\text{m}$$

$k = (56 \pm 2) \text{ g s}^2/\text{m}$  (**2п**). Тражени момент инерције котура је  $I = (kg - m_1 - m_2)R^2 \Rightarrow I = 0,00337 \text{ kg m}^2$  (**2п**).

Одсечак на  $y$  оси је  $b = (0,48 \pm 0,08) \text{ g}$ , а како је  $b = M_{tr} / Rg$  следи да је  $M_{tr} = bRg = 0,7063 \text{ g m}^2/\text{s}^2$

односно  $M_{tr} = 7,06 \cdot 10^{-4} \text{ Nm}$ . Занемарујући грешке за  $R$  и  $g$  важи  $\frac{\Delta b}{b} = \frac{\Delta M_{tr}}{M_{tr}} = 0,166$  па је коначно

$M_{tr} = (7 \pm 2) \cdot 10^{-4} \text{ Nm}$  (**2п**). Тачно нацртан график и коректно исписане вредности у табели 1 вреде (**6п**)



Слика 6. Одређивање момента инерције котура и момента силе трења осовине

Може се приметити да је грешка одређивања момента силе трења графичком методом прилично велика, око 16,6%.

**Напомена:** Признаће се и свака друга зависност којом се добија тачно решење (нпр. из зависности  $a = f(m_2 - m_1)$  уз избор одговарајуће размере из графика се могу добити и прецизније вредности за тражене величине).