

# РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ ФИЗИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА ШКОЛСКЕ 2003/2004. ГОДИНЕ

Крушевац, 15. мај 2004. године

## Задаци за III разред

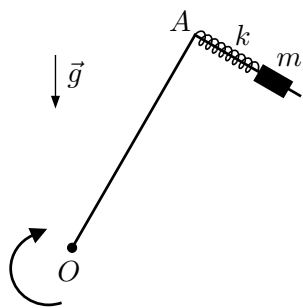
1. Тело масе  $m$  може да се креће без трења по металном раму у облика слова Г. Рам ротира око тачке  $O$  константном угаоном брзином интензитета  $\omega$  у вертикалној равни. Тело је причвршћено за тачку  $A$  опругом коефицијента еластичности  $k$  (слика 1). Нађите амплитуду  $X_0$  малих осцилација овог система у стационарном стању. (15 п.)

2. На слици 2 шематски је приказана једна жица гитаре заједно са системом за затезање жице (чивијом). Дужина жице се мења директно сразмерно углу за који се чивија окрене. У почетку је жица наштамована на ноту Fis, а треба је наштамовати на ноту A. Жицу затегнемо једним пуним окретом чивије, након чега се испостави да њен звук сада тачно одговара ноти Gis. За колики угао треба додатно окренути чивију да би жица била правилно наштамована? Сила затезања жице је директно сразмерна промени њене дужине. Промена дужине жице при штамовању је много мања од њене укупне дужине. Жице осцилују трансверзално. (15 п.)

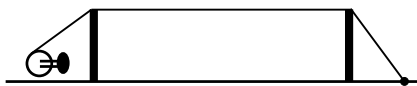
[Објашњење: Једна октава је подељена на 12 полустепена, а однос фреквенција суседних полустепена је  $\sqrt[12]{2}$ . Називи полустепена, од ниже ка вишој фреквенцији, су: C, Cis, D, Dis, E, F, Fis, G, Gis, A, B, H. Дакле, када за једну ноту кажемо да је за октаву виша од друге, то значи да јој је фреквенција двоструко већа.]

3. На слици 3 је приказано бесконачно електрично коло састављено од идентичних завојница индуктивности  $L$ .

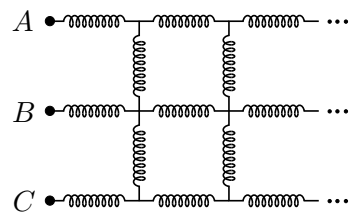
- а) Израчунајте еквивалентну индуктивност  $L_{AC}$  између тачака  $A$  и  $C$ . (10 п.)  
б) Израчунајте еквивалентну индуктивност  $L_{AB}$  између тачака  $A$  и  $B$ . (10 п.)



Слика 1



Слика 2



Слика 3

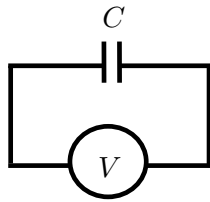
4. Куглице  $A$  и  $B$  су причвршћене за крајеве крутог штапа дужине  $2R$ , а дуж штапа може да се креће без трења куглица  $C$ . Штап униформно ротира око свог центра угаоном брзином интензитета  $\Omega$  у хоризонталној равни. Све три куглице имају исту масу  $m$  и наелектрисање  $q$ . Нађите фреквенцију малих осцилација куглице  $C$ . Магнетну интеракцију и губитке енергије услед зрачења занемарите. (20 п.)

[Помоћ: За  $x \ll 1$  важи  $(1+x)^a \approx 1+ax$ .]

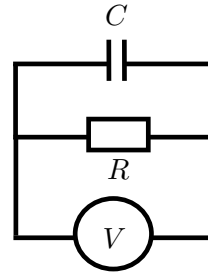
5. Да бисмо одредили капацитет кондензатора  $C$ , извели смо два експеримента. У првом експерименту смо напунили кондензатор, на његове крајеве директно спојили волтметар (слика 4а), очитавали вредности напона  $U_1$  на волтметру у једнаким временским интервалима и резултате уписали у табелу 1. Затим смо, у другом експерименту, кондензатор поново напунили и повезали паралелно са отпорником отпорности  $R = 11.0 \text{ M}\Omega$  и волтметром (слика 4б). У табелу 2 уписали смо добијену временску зависност напона  $U_2$  на волтметру, слично као и у првом експерименту.

- а) Добијене временске зависности напона прикажите графички, али величине које приказујете на  $x$  и  $y$ -оси одаберите тако да се добију линеарне функције. (15 п.)
- б) Користећи графике из претходног дела задатка одредите капацитет кондензатора  $C$ . (15 п.)

[Помоћ: Када је брзина промене неке физичке величине  $A$  сразмена са величином  $A$ , односно  $\Delta A/\Delta t = \alpha A$ , где је  $\alpha$  нека константа, тада је временска зависност величине  $A$  дата са  $A = A_0 e^{\alpha t}$ , где је  $A_0$  вредност те величине у тренутку  $t = 0$ .]



Слика 4а



Слика 4б

$t$ [s]	10	20	30	40	50
$U_1$ [V]	80.5	53.5	36.0	24.5	16.0

Табела 1

$t$ [s]	10	20	30	40	50
$U_2$ [V]	85.0	36.0	15.5	6.5	3.0

Табела 2

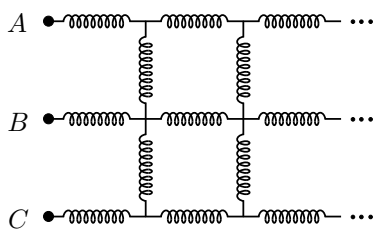
Задатке припремио: Игор Салом  
 Рецензент: Антун Балаж  
 Председник комисије: др Мићо Митровић

# РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ ФИЗИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА ШКОЛСКЕ 2003/2004. ГОДИНЕ

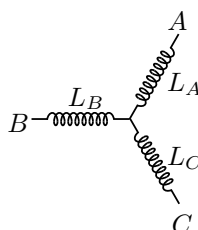
Крушевац, 15. мај 2004. године

## Решења задатака за III разред

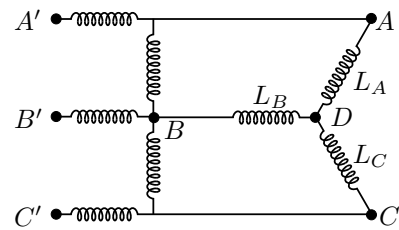
- Дуж краћег крака рама важи  $ma = -k(l - l_0) + F_{cf} \sin \alpha + mg \sin(\omega t + \varphi_0 - \alpha)$ , где смо са  $l$  обележили тренутну дужину опруге, са  $l_0$  дужину опруге у неистегнутом стању, са  $a$  пројекцију убрзања тела, а са  $F_{cf} = m\omega^2 l / \sin \alpha$  центрифугалну силу. Овде је  $\alpha$  угао који заклапа дужи крак рама и права  $p$  која пролази кроз тачку  $O$  и тренутни положај тела. Претпоставили смо да је угао између вертикале и праве  $p$  једнак  $\omega t + \varphi_0$ . Дакле, видимо да је у питању кретање под деловањем принудне хармонијске силе. Сопствену фреквенцију система  $\omega_0$  добијамо разматрањем једначине у којој нема принудне силе, односно  $ma = -k(l - l_0) + F_{cf} \sin \alpha = -k(l - l_0) + m\omega^2 l$ . Како је у овом случају  $ma = -(k - m\omega^2)l + kl_0 = -(k - m\omega^2)(l - l_R)$ , где је  $l_R = kl_0 / (k - m\omega^2)$  нова равнотежна дужина опруге, видимо да је  $\omega_0^2 = k/m - \omega^2$ . Јасно је да се само за  $k/m > \omega^2$  јављају мале осцилације. Коначно је  $X_0 = mg/m|\omega_0^2 - \omega^2|$ , односно  $X_0 = g/|k/m - \omega^2|$ , пошто је амплитуда принудне силе једнака  $mg$ .
- Дужина дела жице који осцилује је константна, па период сваког хармоника зависи само од интензитета брзине простирања трансверзалних таласа  $v$  и обрнуто јој је сразмеран. Фреквенција је  $\nu = \alpha v = \alpha \sqrt{F/\mu} = \alpha \sqrt{k \Delta L / \mu}$ , где су  $\alpha$  и  $k$  одговарајући коефицијенти пропорционалности,  $\Delta L$  је промена дужине жице, а  $\mu$  подужна маса жице. Ако са  $\nu_0$ ,  $\nu_1$  и  $\nu_2$  означимо редом фреквенције тонова Fis, Gis и A, онда важи  $\nu_0 = \alpha \sqrt{k \Delta L / \mu}$ ,  $\nu_1 = \alpha \sqrt{k(\Delta L + d_1) / \mu}$  и  $\nu_2 = \alpha \sqrt{k(\Delta L + d_2) / \mu}$ , где су  $d_1$  и  $d_2$  дужине за које је жицу потребно истегнути да би се од тона Fis добили редом тонови Gis и A. Претпоставили смо да је подужна маса  $\mu$  константна јер су промене укупне дужине жице мале. Како је  $\nu_1/\nu_0 = (\sqrt[12]{2})^2 = \sqrt{(\Delta L + d_1)/\Delta L}$ , следи  $d_1/\Delta L = (\sqrt[12]{2})^4 - 1$  и, аналогно,  $d_2/\Delta L = (\sqrt[12]{2})^6 - 1$ . Сада је  $d_2/d_1 = (\sqrt{2} - 1)/(\sqrt[3]{2} - 1)$ , па коначно добијамо да чивију треба окренути за угао  $\varphi = \frac{d_2 - d_1}{d_1} \cdot 360^\circ$ , односно  $\varphi \approx 214^\circ$ .
- При тражењу еквивалентне индуктивности кола које се састоји од завојница важе иста правила као при тражењу еквивалентне отпорности кола које се састоји од термогених отпорника. Произвољно коло које се састоји од завојница и има три улаза (као у овом случају) може се заменити еквивалентним колом облика звезде (слике 1а и 1б). Даље, индуктивност бесконачног кола се не мења ако му се придода још једна основна јединица, као на слици 1ц. Дакле,  $L_{A'B'} = L_{AB}$  и  $L_{A'C'} = L_{AC}$ . Због симетрије важи  $L_A = L_C$ . Када се у коло са слике 1ц повеже извор струје преко улаза  $A'$  и  $C'$ , због симетрије су тачке  $B$  и  $D$  увек на истом потенцијалу, па се ефективно може уклонити завојница између ових тачака. Из еквивалентности шема на сликама 1б и 1ц (повезивање извора струје на улазе  $A'$  и  $C'$  на слици 1ц одговара прикључивању истог извора на улазе  $A$  и  $C$  на слици 1б) следи  $L_{AC} = L_A + L_C = L_{A'C'} = 2L + (2L \parallel (L_A + L_C))$ . Ако искористимо  $L_A = L_C$ , из ове једначине добијамо  $L_A^2 - LL_A - L^2 = 0$ , односно  $L_A = L(1 \pm \sqrt{5})/2$ . Како је  $L_A > 0$ , закључујемо да је  $L_A = L_C = L(1 + \sqrt{5})/2$ , па је коначно  $L_{AC} = L_A + L_C = (1 + \sqrt{5})L$ , односно  $L_{AC} \approx 3.2L$ .
  - Из шема на сликама 1б и 1ц следи  $L_{AB} = L_A + L_B = L_{A'B'} = 2L + L \parallel (L_A + (L_B \parallel (L_C + L))) = 2L + L \frac{L_A^2 + 2L_A L_B + L L_A + L L_B}{(L + L_A)^2 + 2L_B(L + L_A)}$ . Замењујући вредност  $L_A = L(1 + \sqrt{5})/2$  коју смо добили у првом делу задатка, долазимо до квадратне једначине  $(3 + \sqrt{5})L_B^2 + \frac{\sqrt{5}-1}{2}LL_B - \frac{(3+\sqrt{5})}{2}L^2 = 0$ . Решавајући ову једначину добијамо  $L_B = \frac{-(\sqrt{5}-1) \pm \sqrt{294+126\sqrt{5}}}{4(3+\sqrt{5})}L$ , па због  $L_B > 0$  следи  $L_B \approx 1.1L$  и коначно  $L_{AB} = L_A + L_B \approx 2.7L$ .



Слика 1а



Слика 1б



Слика 1ц

- Једначина кретања куглице  $C$  дуж штапа је  $ma = m\Omega^2 r - \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{(R-r)^2} - \frac{1}{(R+r)^2} \right) = m\Omega^2 r - \frac{Rq^2}{\pi\epsilon_0} \frac{r}{(R^2 - r^2)^2}$ , где је  $a$  пројекција убрзања штапа, а  $r$  је растојање куглице од центра штапа. Из услова  $a = 0$  налазимо да је један равнотежни положај куглице  $r_1 = 0$ , а други  $r_2 = \left( R^2 - \sqrt{\frac{Rq^2}{\pi\epsilon_0 m \Omega^2}} \right)^{1/2}$ , при чему други равнотежни

положај постоји само ако је  $R^3 > \frac{q^2}{\pi\epsilon_0 m \Omega^2}$ . Замењујући  $r = r_1 + x$  у једначину кретања и задржавајући само чланове линеарне по  $x$ , добијамо  $ma = -\left(\frac{q^2}{\pi\epsilon_0 R^3} - m\Omega^2\right)x$ . Положај  $r_1$  је стабилан само ако важи  $R^3 < \frac{q^2}{\pi\epsilon_0 m \Omega^2}$ , и тада не постоји други равнотежни положај. Фреквенција малих осцилација око овог положаја је  $\omega_1 = \sqrt{\frac{q^2}{\pi\epsilon_0 m R^3} - \Omega^2}$ . Уколико важи  $R^3 > \frac{q^2}{\pi\epsilon_0 m \Omega^2}$ , тада први положај није стабилан, а за други положај, замењујући  $r = r_2 + x$ , добијамо  $ma = m\Omega^2(r_2 + x) - \frac{Rq^2}{\pi\epsilon_0(R^2 - r_2^2 - 2r_2x - x^2)^2}$ . Задржавајући само чланове највише линеарне по  $x$ , ова једначина се своди на  $ma = \left(m\Omega^2 - \frac{Rq^2}{\pi\epsilon_0(R^2 - r_2^2)^2}\right)(r_2 + x) - \frac{4Rq^2r_2^2}{\pi\epsilon_0(R^2 - r_2^2)^3}x$ . Узимајући у обзир израз за  $r_2$ , први члан са десне стране је једнак нули, па је фреквенција малих осцилација око овог положаја  $\omega_2 = \sqrt{\frac{4Rq^2r_2^2}{\pi\epsilon_0 m (R^2 - r_2^2)^3}} = \Omega \sqrt{\frac{4r_2^2}{R^2 - r_2^2}} = 2\Omega \left(\sqrt{\frac{\pi\epsilon_0 m \Omega^2 R^3}{q^2}} - 1\right)^{1/2}$ . За  $R^3 = \frac{q^2}{\pi\epsilon_0 m \Omega^2}$  нема линеарног члана у једначини кретања, па кретање нема карактер малих осцилација.

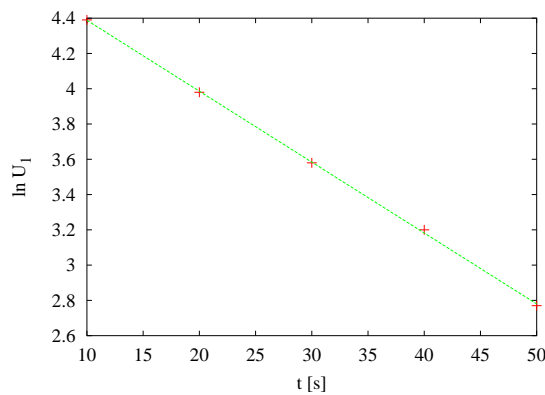
5. а) У току пражњења кондензатора је промена напона  $\Delta U$  на кондензатору за време  $\Delta t$  дата са  $\Delta U = \Delta Q/C$ , где је  $\Delta Q$  наелектрисање које је протекло у колу. Како је  $\Delta Q = -I \Delta t$ , где је  $I = U/R_e$  јачина струје у колу (са  $R_e$  смо означили еквивалентан термогени отпор кола), имамо  $\Delta U = -U \Delta t / R_e C$ , одакле је  $\Delta U / \Delta t = -U / R_e C$ . Решење ове једначине је  $U = U_0 e^{-t/R_e C}$ , где је  $U_0$  напон на кондензатору у тренутку  $t = 0$ . Ако са  $r$  означимо унутрашњи отпор волтметра, онда у првом експерименту важи  $U_1 = U_{01} e^{-t/rC}$ , а у другом експерименту  $U_2 = U_{02} e^{-(r+R)/rRC}$ . Логаритмовањем добијамо  $\ln U_1 = \ln U_{01} - t/rC$  и  $\ln U_2 = \ln U_{02} - t(r+R)/rRC$ , што су линеарне зависности од времена. У табелама 1 и 2 унети су логаритмовани напони, а на сликама 2а и 2б нацртани су тражени графици.
- б) Прво ћемо одредити коефицијенте правца за графике добијене у претходном делу задатка. Грешка мерења напона је  $\Delta U_1 = \Delta U_2 = 0.5 \text{ V} / 2 \approx 0.3 \text{ V}$ , док је грешка мерења времена  $\Delta t = 0.5 \text{ s}$ . Да бисмо одредили коефицијент правца  $k_1$  за график са слике 2а, одабраћемо две тачке на овом графику, А(15 s, 4.2) и В(45 s, 3.0). Сада је  $k_1 = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ , односно  $k_1 = -0.040 \text{ s}^{-1}$ . Релативна грешка је  $\Delta k_1 / |k_1| = \frac{\Delta x_B + \Delta x_A}{x_B - x_A} + \frac{\Delta y_B + \Delta y_A}{|y_B - y_A|}$ . Имамо  $\Delta x_A = \Delta x_B = \Delta t = 0.5 \text{ s}$ , а  $\Delta y_A = \Delta U_1 / U_{1A} \approx 0.3 / 60 \approx 5 \cdot 10^{-3}$  и  $\Delta y_B = \Delta U_1 / U_{1B} \approx 0.3 / 20 \approx 2 \cdot 10^{-2}$ . Сада је  $\Delta k_1 / |k_1| = 0.054$ , одакле је  $\Delta k_1 = 0.0021 \text{ s}^{-1} \approx 0.002 \text{ s}^{-1}$ , па је  $k_1 = (-0.040 \pm 0.002) \text{ s}^{-1}$ . За други график бирамо тачке А(15 s, 4.0) и В(45 s, 1.5). Сада је  $k_2 = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ , односно  $k_2 = -0.083 \text{ s}^{-1}$ . Релативна грешка је  $\Delta k_2 / |k_2| = \frac{\Delta x_B + \Delta x_A}{x_B - x_A} + \frac{\Delta y_B + \Delta y_A}{|y_B - y_A|}$ . Имамо  $\Delta x_A = \Delta x_B = \Delta t = 1 \text{ s}$ , а  $\Delta y_A = \Delta U_2 / U_{2A} \approx 0.3 / 70 \approx 4 \cdot 10^{-3}$  и  $\Delta y_B = \Delta U_2 / U_{2B} \approx 0.3 / 5 \approx 6 \cdot 10^{-2}$ . Сада је  $\Delta k_2 / |k_2| = 0.059$ , одакле је  $\Delta k_2 = 0.0049 \text{ s}^{-1} \approx 0.005 \text{ s}^{-1}$ , па је  $k_2 = (-0.083 \pm 0.005) \text{ s}^{-1}$ . Како је  $k_1 = -1/rC$  и  $k_2 = -(r+R)/rRC$ , одузимањем добијамо  $k_1 - k_2 = 1/RC$ , па је  $C = 1/R(k_1 - k_2)$ , односно  $C = 2.11 \mu\text{F}$ . Релативна грешка је  $\Delta C / C = \Delta R / R + \Delta(k_1 - k_2) / (k_1 - k_2) = \Delta R / R + (\Delta k_1 + \Delta k_2) / (k_1 - k_2) \approx 0.17$ , па је  $\Delta C \approx 0.4 \mu\text{F}$ . Коначно је  $C = (2.1 \pm 0.4) \mu\text{F}$ .

$t$ [s]	10	20	30	40	50
$\ln U_1$	4.39	3.98	3.58	3.20	2.77

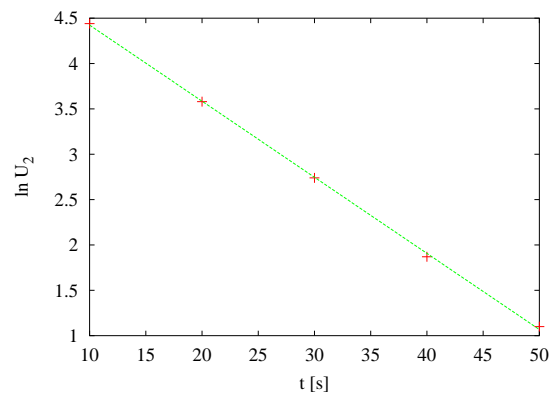
Табела 1

$t$ [s]	10	20	30	40	50
$\ln U_2$	4.44	3.58	2.74	1.87	1.10

Табела 2



Слика 2а



Слика 2б

Задатке припремио: Игор Салом  
Рецензент: Антун Балаж  
Председник комисије: др Мићо Митровић