Савезна Република Југославија

Министарство просвете и спорта Републике Србије

Министарство просвјете и науке Републике Црне Горе

Министарство за просвету, науку и културу Републике Српске

Друштво физичара Југославије

37. Савезно такмичење из физике ученика средњих школа

Нови Сад, 31. мај – 2. јун 2002.

Општа група

Теоријски задаци

Пре него што почнете са решавате задатке пажљиво прочитајте ово упутство:

- Задаци се решавају на папирима које сте затекли на радном месту, а коначни резултати се уписују у Табеле за одговоре, које сте добили заједно са овим задацима.
- На Табеле за одговоре упишите своју шифру. Своје име НЕ СМЕТЕ написати ни на табелама, ни на папирима.
- Ако за неки задатак имате неколико различитих решења, у Табелу за одговоре упишите онај резултат којег сматрате тачним, а на папирима прецртајте решења која сматрате нетачним.
- Када завршите са израдом задатака, предаћете и папире на којима решавате задатке и Табеле за одговоре.
- Теоријски задаци раде се 5 сати.

Задатке припремио: Душко Латас

Рецензент: др Воја Радовановић

Председник комисије: др Мићо Митровић

1. ЗАДАТАК – Четири независна проблема

Овај задатак састоји се од четири независна проблема.

а) Коло од пет идентичних отпорника R повезано је као на слици. Нађите еквивалентан отпор између тачака A и B. (5 б)

б) У центру Сунца густина материје износи приближно $8.0 \cdot 10^4\,\mathrm{kg/m^3}$, а температура је око $13 \cdot 10^6\,\mathrm{K}$. Ако претпоставите да је центар Сунца идеалан гас састављен само од протона и електрона, нађите притисак гаса у центру Сунца. (5 б)

в) Угљеник $^{14}\mathrm{C}$ производи се у атмосфери услед бомбардовања космичким зрачењем. Живи организми асимилирају радиоактивни угљеник $^{14}\mathrm{C}$ заједно са неактивним и уграђују га у ткива. У атмосфери постоји сталан однос $^{14}\mathrm{C}$ и осталих изотопа угљеника тако да на сваки грам угљеника долази активност $^{14}\mathrm{C}$ од 10 распада у минути. Смрћу организма, асимилација престаје па количина $^{14}\mathrm{C}$ опада са периодом полураспада од 5568 година. Мерењем једног грама узорка мумије, добијена је активност $^{14}\mathrm{C}$ од 7.64 распада у минути. Процените старост овог египатског гроба. (5 б)

г) У физици високих енергија изучавају се наелектрисане честице π-мезони са масом између масе електрона и протона. Ове честице су нестабилне и време њиховог полураспада у стању мировања износи $1.77 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{s}$. Оне настају када се акцелераторска мета бомбардује високоенергетским протонима. Утврђено је да колимисани сноп π-мезона напушта мету брзином $v = 0.99\,c$. На ком растојању од мете ће интензитет снопа пасти на половину свог почетног интензитета. (5 б)

2. ЗАДАТАК – Ротација афела Меркура

Први експериментални доказ Ајнштајнове опште теорије релативности је ротација афела Меркура (афел је положај планете када је она најудаљенија од Сунца). За ову појаву знало се и пре него што је откривена општа теорија релативности. Од тада датирају покушаји да се ротација афела објасни са становишта Њутнове теорије гравитације. Наиме, и ова теорија доводи до појаве ротације афела, ако се Сунчев систем моделира као скуп планета урођених у облак равномерно распоређених слабо-интерагујућих масених честица. У овом задатку бавићемо се овим моделом.

Размотрите кретање Меркура масе m у гравитационом пољу Сунца и облака. Масу Сунца означићемо са M, а густину облака са ρ. Облак има малу густину, па важи $\rho \ll M/r^3$, где је r карактеристична удаљеност од Сунца до Меркура.

а) Напишите укупну силу која делује на Меркур, занемарујући утицај других планета. (3б)

б) Докажите да је момент импулса Меркура, рачунат у односу на пол који се налази у центру Сунчевог система константа у току кретања. (3б)

Због константности момента импулса $\vec{L}$, кретање се одиграва у равни, па се може описати са две једначине. Претпоставимо да се Меркур креће по кружној орбити полупречника r_0 око Сунца.

в) Једна једначина кретања је закон одржања интензитета момента импулса, а друга се може добити из услова да се Меркур креће по кружници линијском брзином v_0. Испишите једначине кретања. (3б)

г) Одредите угаону фреквенцију ротације Меркура као функцију полупречника орбите. (3б)

Претпоставите да је извршена мала пертурбација радијалне координате. Тада кружна орбита постаје приближно елиптична, чија велика оса ротира.

д) Да бисте то показали, најпре нађите једначину за радијалну координату r. У овој једначини могу фигурисати само координата r и константе. (3б)

ђ) Претпоставите да је извршена мала пертурбација радијалне координате тако да се Меркур више не креће по кружници $r = r_0 + \eta$ $(\eta \ll r_0)$. Нађите фреквенцију малих радијалних осцилација. (5б)

е) Пошто су периоди угаоне и радијалне осцилације различити, афел ротира. Израчунајте период ротације афела. (5б)

У изради овог задатка, користите се следећом приближном формулом $(1+x)^n = 1 + nx$, која важи за произвољно n и мало x.

3. ЗАДАТАК – Кретање електричног дипола у магнетном пољу

У константном и хомогеном магнетном пољу $\vec{B}$, транслаторно и ротационо кретање система наелектрисаних честица су међусобно повезани. Као последица тога, закони одржања импулса и компоненте момента импулса у правцу магнетног поља $\vec{B}$ су промењени. Ово ћемо илустровати на примеру кретања електричног дипола, који се састоји од две честице, једнаких маса m и супротних наелектрисања q и $-q$ (узећемо да је $q > 0$). Ове две честице су повезане крутим штапом дужине l, занемарљиве масе. Нека је $\vec{r}_1$ вектор положаја честице наелектрисања q, $\vec{r}_2$ је вектор положаја друге честице, а $\vec{l} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$. Означимо са $\vec{r}_{CM}$ и $\vec{v}_{CM}$ векторе положаја и брзине центра масе дипола респективно, а са $\vec{\omega}$ угаону брзину ротације око центра масе дипола. Једноставности ради, узећемо да је угаона брзина ортогонална на правац дипола, $\vec{\omega} \perp \vec{l}$.

а) Напишите једначине кретања центра масе дипола и ротације око центра масе, рачунајући укупну силу на центар масе и укупан момент силе који делује на дипол. (4б)

б) Из једначине кретања центра масе, нађите векторску величину, која се не мења током кретања. Одржану величину, коју ћемо назвати генералисани импулс, означите са $\vec{P}$. Нађите кинетичку енергију дипола, изразите је у функцији од $\vec{v}_{CM}$ и $\vec{\omega}$ и покажите да је и она очувана. (4б)

в) Момент импулса у односу на лабораторијски систем се састоји од два дела: један део потиче од кретања центра масе, а други је одређен ротацијом око центра масе. Помоћу једначина које сте нашли у претходним деловима задатака, покажите да је:

$$J = (\vec{r}_{CM} \times \vec{P} + I\vec{\omega}) \cdot \vec{B},$$

очувана величина. (5б)

Нека је координатни систем изабран тако да је магнетно поље усмерено дуж z-осе. Претпоставите да у почетном тренутку центар масе дипола мирује у координатном почетку, вектор $\vec{l}$ је усмерен у позитивном смеру x-осе, а почетна угаона брзина ротације дипола је $\vec{\omega}(t=0) = \omega_0 \vec{e}_z$.

г) Ако је интензитет почетне угаоне брзине ω_0 мањи од критичне вредности ω_c дипол неће вршити пуне ротације око центра масе. Нађите ω_c. (5б)

д) За произвољно $\omega_0 > 0$, одредите максималну удаљеност центра масе дипола d_m од равни $x = 0$. (7б)

Приликом израде овог задатка, можете користити следеће идентитете који важе за произвољне векторе $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$:

$$(\vec{a} \times \vec{b})_x = (\vec{a})_y(\vec{b})_z - (\vec{a})_z(\vec{b})_y \qquad \vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

$$(\vec{a} \times \vec{b})_y = (\vec{a})_z(\vec{b})_x - (\vec{a})_x(\vec{b})_z \qquad (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$$

$$(\vec{a} \times \vec{b})_z = (\vec{a})_x(\vec{b})_y - (\vec{a})_y(\vec{b})_x \qquad \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

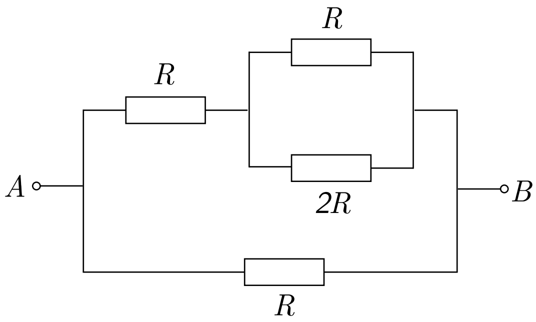
Савезно такмичење из физике ученика средњих школа школске 2001/2002. године

Општа група

Решења

1. ЗАДАТАК – Четири независна проблема

а) Дато коло је еквивалентно колу са слике



из чега се онда добија да је еквивалентан отпор између тачака A и B:

$$R_{AB} = \frac{5}{8}R.$$

б) Притисак гаса у центру Сунца одредићемо из једначине стања идеалног гаса $p = nkT$, где је n број честица у јединици запремине. Концентрације протона и електрона су једнаке (због услова електронеутралности) и износе $n/2$. Зато је густина гаса

$$\rho = (m_p + m_e)\frac{n}{2} \approx \frac{1}{2}m_p n,$$

па се добија

$$p = \frac{2\rho kT}{m_p} = 1.79 \cdot 10^{16}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}.$$

в) У моменту смрти организма у њему се налази количина ^{14}C којој одговара специфична активност $A_s^0 = 10$ распада у минути по граму узорка. Специфична активност истог узорка после времена t је

$$A_s(t) = A_s^0 e^{-\lambda t} = A_s^0 2^{-t/T_{1/2}},$$

па је старост мумије

$$t = T_{1/2}\log_2\frac{A_s^0}{A_s(t)} = 2162\,\mathrm{god}.$$

г) Време полураспада $\tau = 1.77 \cdot 10^{-8}\,$s се мери у систему у коме честица мирује, па је то сопствено време. Пошто се π-мезони крећу релативистичком брзином $v = 0.99\,c$, у лабораторијском систему време полураспада износи

$$t = \frac{\tau}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = 1.25 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{s}.$$

За то време, π-мезони пређу растојање

$$l = vt = 37.3\,\mathrm{m}.$$

а)
$$R_{AB} = \frac{5}{8}R$$

б)
$$p = \frac{2\rho kT}{m_p} = 1.79 \cdot 10^{16}\,\mathrm{Pa}$$

в)
$$t = T_{1/2}\log_2\frac{A_s^0}{A_s(t)} = 2162\,\mathrm{god}$$

г)
$$l = vt = 37.3\,\mathrm{m}$$

2. ЗАДАТАК – Ротација афела Меркура

а) На планету Меркур делује гравитациона сила која потиче од два извора: Сунца и облака. Гравитациона сила Сунца је

$$\vec{F}_s = -G\frac{mM}{r^2}\vec{e}_r,$$

где је G Њутнова гравитациона константа, r растојање од Сунца до Меркура, а $\vec{e}_r = \vec{r}/r$. С друге стране гравитациона сила облака је

$$\vec{F}_o = -G\frac{mM_o(r)}{r^2}\vec{e}_r,$$

где је $M_o(r) = \frac{4}{3}\pi r^3\rho$ маса облака садржана у сфери полупречника r, тако да на Меркур делује сила

$$\vec{F} = -Gm\left(\frac{M}{r^2} + \frac{4}{3}\pi r\rho\right)\vec{e}_r.$$

б) Момент импулса Меркура је

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}.$$

Промена момента импулса у току кретања је

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\times\vec{p} + \vec{r}\times\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}\\ &= \vec{v}\times\vec{p} + \vec{r}\times\vec{F}\\ &= \vec{0},\end{aligned}$$

јер је векторски производ колинеарних вектора нула. Дакле, момент импулса је интеграл кретања, из чега закључујемо да се кретање Меркура одвија у равни нормалној на $\vec{L}$.

в) Момент импулса Меркура на кружној орбити је

$$L = mv_0r_0,$$

а то је уједно и једначина кретања. Из услова да се Меркур креће по кружници, добијамо другу једначину

$$\frac{v_0^2}{r_0} = G\left(\frac{M}{r_0^2} + \frac{4}{3}\pi\rho r_0\right).$$

г) Угаона фреквенција ротације Меркура је

$$\omega_o = \frac{v_0}{r_0} = \left(\frac{GM}{r_0^3} + \frac{4}{3}\pi G\rho\right)^{1/2}.$$

д) Једначина кретања за радијалну координату r је

$$\ddot{r} = \frac{L^2}{m^2r^3} - \frac{GM}{r^2} - \frac{4}{3}\pi G\rho r.$$

ђ) Када се изврши мала пертурбација координате, горња једначина се своди на

$$\ddot{\eta} = \frac{L^2}{m^2(r_0+\eta)^3} - \frac{GM}{(r_0+\eta)^2} - \frac{4}{3}\pi G\rho(r_0+\eta).$$

Након развијања последње једначине по малом параметру η/r_0, добија се

$$\ddot{\eta} = -\left(\frac{3L^2}{m^2r_0^4} - \frac{2GM}{r_0^3} + \frac{4}{3}\pi G\rho\right)\eta.$$

Елиминацијом L^2 из последње једначине, она постаје

$$\ddot{\eta} = -\left(\frac{GM}{r_0^3} + \frac{16}{3}\pi G\rho\right)\eta.$$

Ово је једначина линеарног хармонијског осцилатора, па закључујемо да се мала пертурбација мења хармонијски, са фреквенцијом

$$\omega_r = \left(\frac{GM}{r_0^3} + \frac{16}{3}\pi G\rho\right)^{1/2}.$$

е) Фреквенција орбиталних осцилација Меркура је мања од фреквенције радијалних осцилација $\omega_o < \omega_r$, што значи да се за време једне радијалне осцилације T_r не изврши пуна угаона осцилација. Наиме, за то време, угао којег опише Меркур износи

$$2\pi - \delta = T_r\omega_o,$$

тако да афел ротира. Угаона брзина ротације афела је

$$\begin{aligned}
\omega_a &= \frac{\delta}{T_r} = \frac{2\pi}{T_r} - \frac{2\pi-\delta}{T_r} \\
&= \omega_r - \omega_o \\
&= \sqrt{\frac{GM}{r_0^3} + \frac{16}{3}\pi G\rho} - \sqrt{\frac{GM}{r_0^3} + \frac{4}{3}\pi G\rho} \\
&\approx 2\pi\rho\sqrt{\frac{r_0^3G}{M}},
\end{aligned}$$

па је период осциловања афела

$$T_a = \frac{1}{\rho}\sqrt{\frac{M}{r_0^3G}}.$$

а)

$$\boxed{\vec{F} = -Gm\left(\frac{M}{r^2} + \frac{4}{3}\pi r\rho\right)\vec{e}_r}$$

в)

$$\boxed{L = mv_0r_0; \quad \frac{v_0^2}{r_0} = G\left(\frac{M}{r_0^2} + \frac{4}{3}\pi\rho r_0\right)}$$

г)

$$\boxed{\omega_o = \left(\frac{GM}{r_0^3} + \frac{4}{3}\pi G\rho\right)^{1/2}}$$

д)

$$\boxed{\ddot{r} = \frac{L^2}{m^2r^3} - \frac{GM}{r^2} - \frac{4}{3}\pi G\rho r}$$

ђ)

$$\boxed{\omega_r = \left(\frac{GM}{r_0^3} + \frac{16}{3}\pi G\rho\right)^{1/2}}$$

е)

$$\boxed{T_a = \frac{1}{\rho}\sqrt{\frac{M}{r_0^3G}}}$$

3. ЗАДАТАК – Кретање електричног дипола у магнетном пољу

а) Укупна сила која делује на дипол је

$$\begin{aligned}
\vec{F} &= \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \\
&= q\vec{v}_1 \times \vec{B} + (-q)\vec{v}_2 \times \vec{B} \\
&= q(\vec{v}_1 - \vec{v}_2) \times \vec{B}, \\
&= q\dot{\vec{l}} \times \vec{B},
\end{aligned}$$

па је

$$M\dot{\vec{v}}_{CM} = q\dot{\vec{l}} \times \vec{B}, \quad (M = 2m).$$

Овде је са тачком означено диференцирање по времену. Момент силе који доводи до ротације око центра масе је

$$\begin{aligned}
I\dot{\vec{\omega}} &= \vec{M}_1 + \vec{M}_2 \\
&= \frac{\vec{l}}{2} \times (q\vec{v}_1 \times \vec{B}) + \frac{-\vec{l}}{2} \times (-q\vec{v}_2 \times \vec{B}) \\
&= q\vec{l} \times \frac{(\vec{v}_1 + \vec{v}_2)}{2} \times \vec{B}, \\
&= q\vec{l} \times (\vec{v}_{CM} \times \vec{B}),
\end{aligned}$$

где је $I = \frac{1}{2}ml^2$.

б) Из једначине кретања центра масе следи да је генералисани импулс

$$\dot{\vec{P}} = 0 \rightsquigarrow \vec{P} = M\vec{v}_{CM} - q\vec{l}\times\vec{B}.$$

Закон одржања енергије се добија коришћењем једначина које су одређене у делу а) овог задатка. Наиме, енергија

$$E = \frac{1}{2}M\vec{v}_{CM}^2 + \frac{1}{2}I\vec{\omega}^2,$$

је константа у току кретања јер је

$$\begin{aligned}\dot{E} &= M\dot{\vec{v}}_{CM}\cdot\vec{v}_{CM} + I\dot{\vec{\omega}}\cdot\vec{\omega}\\ &= q(\dot{\vec{l}}\times\vec{B})\cdot\vec{v}_{CM} + q[\vec{l}\times(\vec{v}_{CM}\times\vec{B})]\cdot\vec{\omega}.\end{aligned}$$

Помоћу идентитета векторске анализе и једнакости $\dot{\vec{l}} = \vec{\omega}\times\vec{l}$ показује се да је последњи израз нула.

в) Кренимо од

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[(\vec{r}_{CM}\times\vec{P})\cdot\vec{B}] &= (\vec{v}_{CM}\times\vec{P})\cdot\vec{B}\\ &= -q[\vec{v}_{CM}\times(\vec{l}\times\vec{B})]\cdot\vec{B}\\ &= q[(\vec{l}\times\vec{B})\times\vec{v}_{CM}]\cdot\vec{B}\\ &= q(\vec{l}\times\vec{B})\cdot(\vec{v}_{CM}\times\vec{B})\\ &= q\vec{l}\cdot[\vec{B}\times(\vec{v}_{CM}\times\vec{B})]\\ &= -q\vec{l}\cdot[(\vec{v}_{CM}\times\vec{B})\times\vec{B}]\\ &= -q[\vec{l}\times(\vec{v}_{CM}\times\vec{B})]\cdot\vec{B}\\ &= -I\dot{\vec{\omega}}\cdot\vec{B},\end{aligned}$$

тако да је очувана величина

$$J = (\vec{r}_{CM}\times\vec{P} + I\vec{\omega})\cdot\vec{B}.$$

г) Нека је $\varphi(t)$ угао којег штап заклапа са позитивним правцем x-осе. Онда је

$$\vec{l} = l(\cos\varphi(t)\vec{e}_x + \sin\varphi(t)\vec{e}_y),$$

па је генералисани импулс

$$\vec{P} = M\vec{v}_{CM} - qlB(\sin\varphi(t)\vec{e}_x - \cos\varphi(t)\vec{e}_y).$$

По услову задатка, у почетном тренутку је $\vec{v}_{CM} = 0$ и $\varphi = 0$ тако да је $\vec{P} = qlB\vec{e}_y$, па су компоненте брзине центра масе

$$\dot{x}_{CM} = \frac{qlB}{M}\sin\varphi, \quad \dot{y}_{CM} = \frac{qlB}{M}(1-\cos\varphi).$$

Из закона одржања енергије имамо

$$\frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2 + \frac{(qlB)^2}{M}(1-\cos\varphi) = \frac{1}{2}I\omega_0^2,$$

или након незнатног сређивања

$$\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}\omega_c^2(1-\cos\varphi) = \omega_0^2,$$

где је $\omega_c = 2qB/m$. Ако се дипол непрестано ротира око центра масе, његова угаона брзина не сме постати нула, из чега се добија услов

$$\omega_0^2 > \omega_c^2 \rightsquigarrow |\omega_0| > \omega_c = \frac{2qB}{m}.$$

д) Из закона одржања величине J, имамо

$$J = (x_{CM}P + I\omega)B,$$

где је P интензитет вектора $\vec{P}$. У тренутку $t = 0$, имамо $J = I\omega_0 B$ те је

$$x_{CM}P + I\omega = I\omega_0.$$

Из закона одржања енергије видимо да је $\omega_0^2 \geq \omega^2$, те је $x_{CM} \geq 0$. Такође, видимо да x_{CM} достиже максимум d_m када је ω минимално.

Када је $\omega_0 < \omega_c$, минимална вредност од ω је $-\omega_0$ па је

$$d_m = \frac{2I}{P}\omega_0 = \frac{m\omega_0}{qB}l, \quad \omega_0 < \omega_c.$$

За $\omega_0 > \omega_c$, минимум од ω је $\sqrt{\omega_0^2 - \omega_c^2}$ из чега следи

$$\begin{aligned}d_m &= \frac{I}{P}\left(\omega_0 - \sqrt{\omega_0^2 - \omega_c^2}\right)\\ &= \frac{m}{2qB}\left(\omega_0 - \sqrt{\omega_0^2 - \omega_c^2}\right)l, \quad \omega_0 > \omega_c.\end{aligned}$$

У случају $\omega_0 = \omega_c$ имамо $\omega^2 = \omega_c^2\cos^2(\varphi/2)$, те је минимално $\omega = 0$, односно макимално растојање од yz-равни износи

$$d_m = \frac{I}{P}\omega_0 = \frac{m\omega_0}{2qB}l, \quad \omega_0 = \omega_c.$$

а)

$$\boxed{2m\dot{\vec{v}}_{CM} = q\dot{\vec{l}}\times\vec{B}; \quad \frac{1}{2}ml^2\dot{\vec{\omega}} = q\vec{l}\times(\vec{v}_{CM}\times\vec{B})}$$

б)

$$\boxed{\vec{P} = M\vec{v}_{CM} - q\vec{l}\times\vec{B}; \quad E = \frac{1}{2}M\vec{v}_{CM}^2 + \frac{1}{2}I\vec{\omega}^2}$$

г)

$$\boxed{\omega_c = \frac{2qB}{m}}$$

д)

$$\boxed{d_m = \begin{cases}\frac{m\omega_0}{qB}l, & \omega_0 < \omega_c\\ \frac{m}{2qB}\left(\omega_0 - \sqrt{\omega_0^2-\omega_c^2}\right)l, & \omega_0 > \omega_c\\ \frac{m\omega_0}{2qB}l, & \omega_0 = \omega_c\end{cases}}$$