Југословенско друштво физичара

XXXVI савезно такмичење из физике
ученика основних и средњих школа

Бечићи, 31. мај – 3. јун 2001.

ЈУГОСЛОВЕНСКО ДРУШТВО ФИЗИЧАРА

36. САВЕЗНО ТАКМИЧЕЊЕ

ЗАДАЦИ

ШЕСТИ РАЗРЕД

1. Два дечака Аца и Бора треба да стигну из места М у место Н удаљено 15 km од М. Кад иду пешице, они се крећу брзином 5 km/h. Осим тога, они имају на располагању један бицикл који може да се креће брзином 15 km/h. Из места М истовремено крећу Аца пешице и Бора на бициклу. Бора вози бицикл до сусрета са Цанетом који је кренуо из Н ка М. Даље Бора иде пешице а Цане вози бицикл до сусрета са Ацом, предаје му бицикл и Аца у Н стиже на бициклу. Када треба да крене Цане да би Аца и Бора у Н стигли истовремено? (Цане се креће истом брзином као као Аца и Бора.) (20 п.)

2. Путник, на путу до железничке станице, прешао је 3 km за 1 сат и израчунао да ће закаснити 20 минута ако буде ишао истом брзином. Зато је кренуо брже и прелазио је $0,5$ km више за један сат, тако да је на станицу стигао 40 минута пре поласка воза. Колики пут је прешао путник? (20 п.)

3. Бициклиста који полази из А треба у Б да стигне за 3 сата. Истовремено из Ц полази други бициклиста који, да би у Б стигао истовремено са првим, мора сваки километар да прелази за 1 минут краће време него први бицикилиста. Растојање оц Ц до Б је за 6 km дуже него растојање од А до Б. Одредити та растојања. (20 п.)

4. Какав треба да буде однос запремина воде и алкохола да би њихова смеша имала густину $\varrho = 0,9 \times 10^3$ kg/m^3? Приликом мешања алкохола и воде долази до смањења запремине смеше тако да запремина смеше износи $0,97$ од збира запремине воде и алкохола. Густина алкохола износи $\varrho_{\rm a} = 0,8 \times 10^3$ kg/m^3. (20 п.)

5. Наћи густину хомогеног тела које у ваздуху има тежину $P_1 = 2,8$ N, а у води $P_2 = 1,69$ N. Густина воде је $\varrho_0 = 10^3$ kg/m^3, а густина ваздуха $\varrho_1 = 1,29$ kg/m^3. (20 п.)

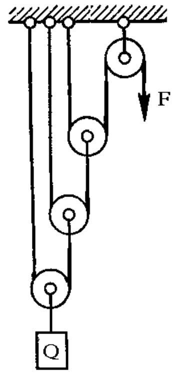
Задатке припремио: др Мирослав Николић
Рецензент: др Иван Манчев

СЕДМИ РАЗРЕД

1. Кретање два аутомобила по правом путу описано је једначинама $s_1 = At + Bt^2$ и $s_2 = C + Dt$, где је $A = 2$ m/s, $B = 0,5$ m/s^2, $C = 100$ m и $D = -4$ m/s. Кретање оба аутомобила посматрамо у истом систему референције. Одредити: (20 п.)
   а) Растојање између аутомобила након 5 s;
   б) Где ће бити положај (координата) првог аутомобила у моменту када се други налази у почетном положају првог;
   в) Написати зависност $v = v(t)$ за сваки аутомобил.

2. Систем котурова приказан на слици налази се у равнотежи. Одредити силу F која држи систем у равнотежи, ако је за први котур везан тег тежине $Q = 100$ N, а сваки котур има масу $m = 2$ kg. Масе нити су занемарљиве. (20 п.)

3. Лоптица се налази на висини $H = 7,5$ m изнад глатке хоризонталне подлоге. Колику почетну брзину v_0 треба саопштити лоптици у вертикалном правцу, да би после другог удара о под она одскочила до првобитне висине, уколико при сваком удару лоптица губи 20% своје кинетичке енергије? Отпор ваздуха занемарити. (20 п.)



4. Камен масе $m = 0,2$ kg који је бачен вертикално увис почетном брзином $v_0 = 25$ m/s удари у хоризонталну препреку која се налази на висини $H = 22$ m изнад места бацања, а затим се врати на земљу. При удару камен изгуби кинетичку енергију и његова брзина једнака је нули непосредно после удара. Укупно време трајања кретања камена од тренутка бацања до тренутка пада је $t = 3,5$ s. Одредити силу F којом камен удари у препреку. Отпор ваздуха занемарити. (20 п.)

5. Бакарно тело масе $m_1 = 0,04$ kg, загрејано до температуре $t_1 = 600$ °C, унесе се у калориметарски суд у коме је вода масе $m_2 = 0,3$ kg, чија је температура $t_2 = 20$ °C. При убацивању тела у калориметарски суд испари део воде масе $m_3 = 0,002$ kg. Колика је коначна температура воде? Топлота испаравања воде је $q_i = 2,26 \cdot 10^6$ J/kg, специфична топлота бакра је $c_1 = 350$ J/(kg K), а специфична топлота воде је $c_2 = 4186$ J/(kg K). Занемарити загревање калориметарског суда и остале топлотне губитке. (20 п.)

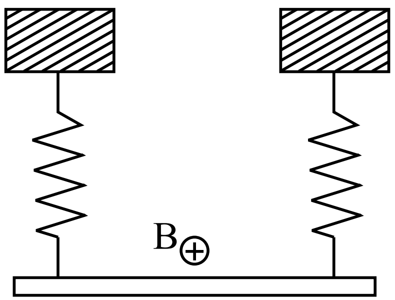
Напомена: За убрзање Земљине теже узети $g = 10$ m/s^2.

Задатке припремио: др Иван Манчев
Рецензент: др Мирослав Николић

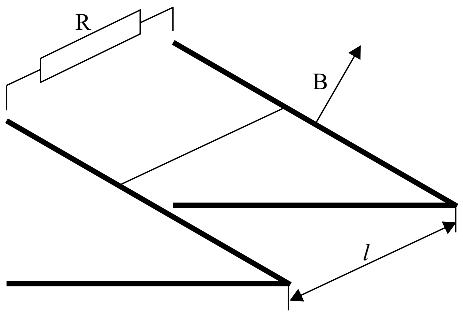
ОСМИ РАЗРЕД
Теоријски задаци

1. На располагању вам стоје: извор електромоторне силе $\mathcal{E} = 1$ V као и два празна кондензатора капацитета $C_1 = 2\ \mu$F и $C_2 = 3\ \mu$F. Колики је највећи напон који се може добити комбинујући ова три елемента? При томе можете произвољан број пута празнити и пунити кондензаторе, везивати на све могуће начине и сл., једном речју, све је дозвољено! (20 п.)

2. На крајеве извора електромоторне силе чији је унутрашњи отпор непознат, прикључен је отпорник отпора $R = 2\ \Omega$. При томе, кроз извор тече струја јачине I. Ако се редно са овим отпором прикључи непознат отпор R_x, онда јачина струје кроз извор износи $3I/4$, а ако се непознати отпор веже паралелно са датим отпором, онда јачина струје кроз извор износи $6I/5$. Одредите вредност непознатог отпора R_x. (10 п.)



Слика 1

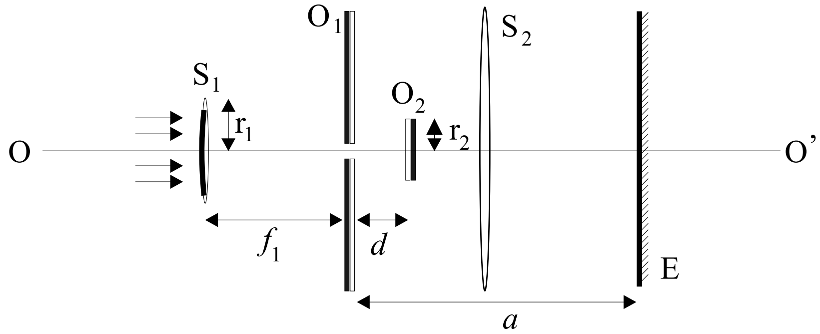


Слика 2

3. Проводни штап окачен је на својим крајевима на две опруге истих особина (види слику бр. 1). Ако се кроз штап пропусти струја јачине $I_1 = 12$ A, онда се издужење опруга смањи, а ако се пропусти струја јачине $I_2 = 15$ A (у смеру супротном од првобитне) онда се издужење опруга повећа. Разлика између та два положаја износи $a = 8$ mm. Наћи константу опруге κ, ако је дужина штапа $l = 10$ cm, а магнетна индукција $B = 0.2$ T. (10 п.)

4. Две паралелне проводне шине, које су међусобно удаљене $l = 0.2$ m граде са хоризонталом угао $\alpha = 60°$. По њима клизи проводна шипка масе $m = 10$ g. Нормално на раван коју образују шине, успостављено је магнетно поље индукције $B = 0.5$ T усмерено навише. Коефицијент трења између шина и шипке је $\mu = \sqrt{3}/2$. Колики треба да буде отпор отпорника којим треба преспојити шине да би шипка клизила наниже равномерно брзином $v = 0.5$ m/s? Узети да је $g = 10$ m/s^2, а отпор шина и шипке занемарити. (15 п.)

5. Паралелан светлосни сноп пада на сабирно сочиво S_1 жижне даљине $f_1 = 3$ cm. Највећи пресек сочива са равни која је нормална на његову осу је круг полупречника $r = \sqrt{3}$ cm. Сочиво је затамњено тако да кроз њега пролазе само зраци који падају по његовом ободу. У жижи овог сочива се налази мали отвор на великом равном огледалу O_1 постављеном нормално на осу сочива. Друго равно огледало O_2 у облику круга, полупречника $r_2 = 5$ mm постављено је паралелно првом на удаљености $d = 1$ mm. Рефлектујуће површине ова два огледала су окренуте једна према другој. Правац OO' је оса симетрије целог система. На ком месту (рачунајући од отвора) треба поставити друго сабирно сочиво S_2 жижне даљине $f_2 = 30$ mm, да би на заклону E, који је удаљен $a = 152$ mm од отвора, добили светлу тачку? (20 п.)



Слика 3

Напомена: Уколико се током решавања појаве изрази који садрже квадрате непознатих величина, можете их простим трансформацијама довести на неке од алгебарских израза које сте учили! При томе је згодно да у једначину уврстите бројне вредности познатих величина. Ако то урадите, водите рачуна да свака једначина мора бити и димензионално задовољена.

Задатке припремио: мр Срђан Ракић
Рецензенти: мр Андријана Жекић и др Мићо Митровић

ОСМИ РАЗРЕД
Експериментални задатак

Мерење коефицијента површинског напона течности

Мерни комплет

Потребна мерења се врше комплетом који садржи:

1) шприц са шупљом иглом,
2) хронометар,
3) жичани држач шприца,
4) посуда у коју истиче течност,
5) течности чији се коефицијенти површинског напона мере.

При мерењима и израчунавањима водите рачуна о следећем:

1) **Не палите отворен пламен у близини мерног комплета.**
2) Пажљиво рукујте иглом да се не бисте повредили.
3) Пажљиво рукујте шприцом и иглом, да не бисте откинули иглу од шприца.
4) У току мерења шприц и иглу поставите у приближно вертикалан положај на држачу.

Течности се супростављају повећавању своје слободне површине, изложене ваздуху. Ова појава се назива површински напон. Супростављање се врши силама површинског напона. На пример, због постојања површинског напона жилет плива по површини воде, иако има много већу густину од воде, јер ако би потонуо, површина течности би се повећала.
Због постојања сила површинског напона, кап течности се задржава на излазу из цеви, док не достигне одређену тежину. Наиме, ако се кап откине, површина течности изложена ваздуху се повећа, чему се супростављају силе површинског напона. Кап се откида тек када постане довољно велика, да сила њене тежине постане већа (у граничном случају једнака) од силе површинског напона.
Ако се претпостави да су капи течности у облику куглица, може се показати да је трећи степен њиховог полупречника једнак:

$$r^3 = \gamma \, \frac{3R}{2\varrho g},$$

где су: R – спољашњи полупречник цеви, ϱ – густина течности и γ – коефицијент површинског напона течности. Коефицијент површинског напона течности је једна од особина течности и зависи од њене темпетаруре.

Задатак

Коришћењем расположивог мерног комплета измерите коефицијенте површинског напона воде и етил--алкохола. Процените грешке ваших мерења. Мерење извршите бројањем капи којима из шприца истекне одређена запремина течности. (25 п.)

Препорука: За прегледан приказ мерених и израчунатих величина користите приложену табелу, у којој је са N означен број капи.
Напомена: Ако је физичка величина y повезана са физичким величинама x и z једначином:

$$y = C\,\frac{x}{z},$$

где је C константа, тада њена апсолутна грешка износи:

$$\Delta y = y\left(\frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta z}{z}\right),$$

где су Δx и Δz апсолутне грешке величина x и z.
Познате величине и формуле:

спољашњи полупречник игле:	$R = 0.4$ mm,
густина воде:	$\varrho_{\text{в}} = 1000$ kgm^3,
густина етил-алкохола:	$\varrho_{\text{a}} = 900$ kgm^3,
убрзање Земљине теже:	$g = 9.81$ ms^2,
запремина кугле:	$V = \dfrac{4\pi r^3}{3}$, где је r - полупречник кугле.

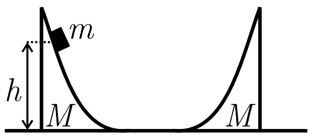
Занемарити грешке горе наведених познатих величина

течност	вода	етил-алкохол
N		
N_S		
N		

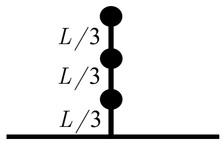
Задатак припремили: др Мићо Митровић и мр Андријана Жекић

ПРВИ РАЗРЕД

1. Два покретна клина једнаких маса M мирују у почетном тренутку на хоризонталној подлози. Са левог клина склизне плочица масе m са висине h (слика 1). На коју ће се максималну висину h' подићи плочица на десном клину? Трење занемарите. (20 п.)



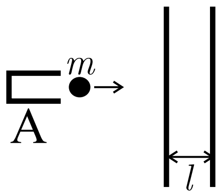
Слика 1



Слика 2

2. а) На хоризонталну подлогу је постављен штап дужине $L = 1.2$ m и занемарљиве масе. На штапу су учвршћене три једнаке куглице на међусобним растојањима $L/3$, а штап је учвршћен за подлогу у подножју (слика 2). Одредите интензитете брзина куглица у тренутку удара у подлогу, ако је штап почео да пада без почетне брзине. Интензитет убрзања Земљине теже је $g = 9.81\,\mathrm{m/s^2}$. (10 п.)

   б) Један крај нити дужине l причвршћен је за непокретни сталак, а други крај за тег масе m. Тег је изведен из равнотежног положаја и пуштен да осцилује тако да његова максимална висина у односу на равнотежни положај износи h. Нађите интензитет силе затезања нити T у тренутку проласка тега кроз равнотежни положај. Колика је највећа дозвољена вредност висине h при којој нит неће пући? Нит може да издржи максималну силу затезања интензитета $T_0 = 6mg$. (10 п.)



Слика 3

3. Свемирски брод се налази у сазвежђу Лабуд (Cygnus) и почиње са истраживањем звезде X-1 (Cyg X-1). На растојању $r_1 = 3.02 \cdot 10^9$ km од звезде брод је мировао у односу на њу. Под утицајем гравитационе силе брод је почео да се приближава звезди и на растојању $r_2 = 1.01 \cdot 10^9$ km његова брзина имала је интензитет $v = 47.6\,\mathrm{km/s}$. Након тога је уочено да је Cyg X-1 звездани систем, мада је само једна звезда видљива. Научници са брода су измерили да се видљива звезда креће по кружници полупречника $R_1 = 7.91 \cdot 10^6$ km са периодом $T = 5.60$ дана. Ово их је навело на идеју да је пратилац видљиве звезде црна рупа. Овакав објекат настаје еволуцијом звезде чија је маса већа од три Сунчеве масе, има веома мали полупречник (неколико километара) и због јаке гравитационе силе на његовој површини чак ни светлост не може да га напусти, па је зато невидљив. Наравно, његово гравитационо дејство на околне објекте је исто као да се ту налази звезда једнаке масе. На основу датих података нађите масу видљиве звезде M_1 и масу њеног пратиоца M_2. Да ли невидљиви пратилац може да буде црна рупа, судећи по његовој маси M_2? Маса Сунца је $M_s = 1.98 \cdot 10^{3}0$ kg, а гравитациона константа износи $\gamma = 6.67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^3/kg\,s^2}$. [За двојне системе III Кеплеров закон може да се напише у облику $\gamma(M_1 + M_2)/4\pi^2 = R^3/T^2$, где су M_1 и M_2 масе појединих компоненти, а R је њихово растојање. Обе компоненте ротирају око центра масе са једнаким периодом T.] (20 п.)

4. Човек се налази у чамцу на језеру и жели да одреди масу чамца M. Како то да уради, ако зна своју масу m и поседује само траку за мерење дужине која је веома дугачка? (15 п.)

m [g]	d [mm]
5.0	25
10	12
15	8.2
20	6.2
25	5.1

Табела 1

m [g]	l [mm]
5.0	11
10	7.5
15	5.8
20	4.7
25	4.0

Табела 2

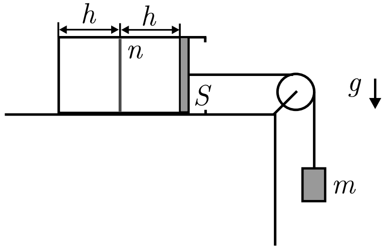
5. За испитивање особина неког материјала користи се апаратура приказана на слици 3. Уређај А може да испаљује пројектиле различитих маса тако да сви имају исту почетну кинетичку енергију E_0. Пројектили налећу на плочу дебљине l од материјала који се испитује. Познато је да сила отпора која делује на пројектил док се креће кроз плочу зависи само од масе пројектила. Наш задатак је да нађемо ту зависност. Зато је изведен експеримент у коме је измерена дубина продирања d у плочу за пројектиле различитих маса m. Добијени резултати су дати у табели 1. На основу тих података нацртајте график са кога ће се видети каква је зависност интензитета силе отпора од масе пројектила $F(m)$, а затим ову зависност прикажите и аналитички (формулом). Да би нам ова зависност била у потпуности позната, неопходно је да нађемо и вредност енергије E_0. За њено мерење изведен је експеримент у коме је за пројектиле различитих маса m одређивана дебљина плоче l при којој пројектил кроз плочу прође за време $t_0 = 1.0$ ms и добијени резултати су дати у табели 2. Помоћу ових података, користећи знање о облику зависности $F(m)$ које сте претходно стекли, нацртајте график који ће вам омогућити да одредите енергију E_0. Израчунајте енергију E_0, а након тога нађите и

коначни облик зависности $F(m)$. Величине чије зависности приказујете на графицима одаберите тако да све зависности буду линеарне. (25 п.)

Задатке припремио: Антун Балаж
Рецензент: др Сунчица Елезовић-Хаџић

ДРУГИ РАЗРЕД
Теоријски задаци

1. На слици 1 је приказан систем који се састоји од тега масе $m = 10$ kg и хоризонтално постављеног топлотно изолованог суда. Суд је преградом која је начињена од материјала који је добар топлотни изолатор подељен на два једнака дела дужина $h = 1$ m. У левом делу суда је вакуум, а у десном $n = 1$ мол азота. Суд је затворен клипом попречног пресека $S = 3\ \mathrm{dm}^2$ који је, као и преграда начињен од материјала који је добар топлотни изолатор и који може да клизи са малим трењем по зиду суда. У почетном тренутку клип је слободан и систем је у равнотежи. Затим се клип фиксира, а преграда уклони. Када се у суду успостави равнотежа, клип се пусти да се слободно креће. На коју страну и за колико ће бити померен коначни равнотежни положај тега у односу на првобитни? Одредити крајњу температуру и притисак гаса у суду, као и промену ентропије у овом процесу. Сматрати да је нит неистегљива и да нема трења у лежишту котура. Азот сматрати идеалним двоатомским гасом ($C_V = 5/2R$). Атмосферски притисак је $p_a = 101$ kPa. (17 п.)



Слика 1

2. Коло са слике 2 састоји се од четири отпорника једнаких отпорности R, четири кондензатора $C_1 = C_2 = C$, $C_3 = C_4 = 2C$ и четири извора електромоторне силе $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_3 = \mathcal{E}$, $\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_4 = 3\mathcal{E}$. Нацртати еквивалентну шему кола и одредити наелектрисања на свим кондензаторима. Ако се уместо кондензатора C_2 у коло веже отпорник отпорности $2R$, одредити колика топлота се ослободи на њему за време t. Све резултате изразити у функцији R, C, $\mathcal{E}$ и t. (17 п.)

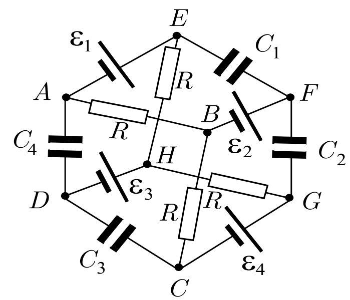
3. Цилиндрични суд висине $H = 1$ m и попречног пресека $S_1 = 1\ \mathrm{dm}^2$ напуњен је до врха водом и затворен слободним клипом масе $M = 5$ kg. На дну суда је начињен отвор попречног пресека $S_2 = 1\ \mathrm{cm}^2$ кроз који може да истиче вода из суда. Одредити зависност брзине спуштања нивоа воде у суду од растојања за које се спусти клип. За које време ће сва вода истећи из суда? Занемарити контракцију млаза. (13 п.)

4. У плочи од никла на температури $t_1 = -10$ °C је начињен кружни отвор полупречника $r = 20$ mm у који је уметнут диск од бакра истог полупречника и температуре. Цео систем се затим загрева до температуре $t_2 = 20$ °C. Одредити полупречник убаченог бакарног диска, као и притисак који се јавља на граници између два метала после загревања. Термички коефицијенти линеарног ширења су за никл и бакар $\alpha_1 = 11\times10^{-6}\ \mathrm{K}^{-1}$ и $\alpha_2 = 19\times10^{-6}\ \mathrm{K}^{-1}$, а одговарајући Јунгови модули еластичности $E_1 = 9.1 \times 10^{10}\ \mathrm{N/m}^2$ и $E_2 = 19.0 \times 10^{10}\ \mathrm{N/m}^2$. (13 п.)

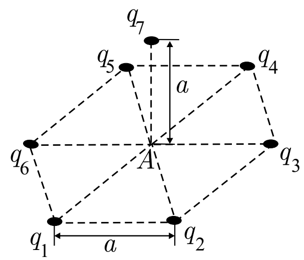
5. Седам тачкастих наелектрисања распоређено је као на слици 3. Шестоугао је правилан и дужина странице је a. Наелектрисања су $q_1 = -q_2 = -q_4 = q_5 = q$, $q_3 = -q_6 = -2q$ и $q_7 = 3q$. Одредити вектор јачине електричног поља у центру шестоугла (тачка A).(10 п.)

$R = 8.314$ J/(K $\cdot$ mol), $g = 9.81\ \mathrm{m/s}^2$, 0 °C = 273.15 K, $\varrho_{H_2O} = 1000\ \mathrm{kg/m}^3$, $p_a = 101$ kPa, $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} C^2/\mathrm{Nm}^2$

Напомена: Грешке величина чије су вредности дате као цели бројеви су занемариве.



Слика 2



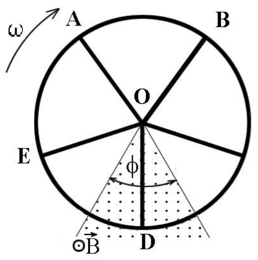
Слика 3

Задатке припремила: Марија Димитријевић
Рецензент: мр Ђорђе Спасојевић

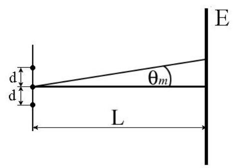
ТРЕЋИ РАЗРЕД
Теоријски задаци

1. Танак штап дужине $l = 955$ mm креће се у правцу своје уздужне осе по глаткој хоризонталној подлози константном брзином v. Штап наилази на храпаву подлогу коефицијента трења $\mu = 0.10$. Израчунати вредност брзине v и време кретања t од доласка штапа до границе двеју подлога до заустављања, ако се зна да је време од тренутка доласка на границу до тренутка кад цео штап пређе на подлогу $t_1 = 0.62$ s. (Узети да је $g = 9.81$ m/s^2.) (12 п.)

2. Точак полупречника $r = 32.5$ cm, састављен од жице специфицне отпорности $\varrho = 0.120 \times 10^{-6}$ Ωm и попречног пресека $S = 4.10$ mm^2, ротира константном угаоном брзином $\omega = 1.50$ rad/s око фиксне осе која пролази кроз центар O и нормална је на раван у којој лежи точак (слика 1). Приликом свог кретања, точак пролази кроз део простора у којем постоји хомогено магнетно поље магнетне индукције $B = 110$ mT, чије су линије паралелне оси ротације. Област деловања поља у равни точка је кружни исечак са центром у O и углом $\phi = 60°$. Ако кроз магнетно поље пролази грана OD колика струја I_1 протиче за то време кроз грану OB точка? Колика се електрична снага P губи на точку? (Самоиндуктивност занемарити.) (15 п.)



Слика 1

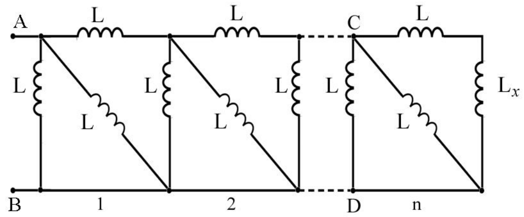


Слика 2

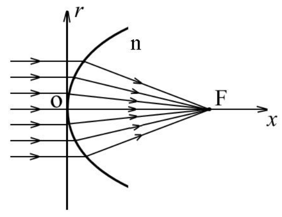
3. Три кохерентна тачкаста извора светлости таласне дужине λ постављена су дуж једне праве на међусобном растојању d (слика 2). Амплитуде таласа из сва три извора су једнаке. Интерференциона слика се посматра на екрану E који је на растојању L од праве на којој леже извори и при том је $L \gg d$. Под којим углом θ_m се на екрану E види први минимум? (12 п.)

4. На слици 3 је приказано коло које се састоји од n једнаких сегмената (састављених од једнаких завојница свака индуктивитета L) и завојнице индуктивитета L_x. Колики треба да буде однос $m = L_x/L$, да индуктивност кола између тачака A и B не зависи од броја сегмената? (Међусобну индуктивност завојница занемарити.) (15 п.)

5. Паралелан сноп светлости пада из вакуума на осно симетричну површ која ограничава средину индекса преламања n (слика 4). Ако се зна да се сви зраци, након преламања на граничној површи, сабирају у жижи F на растојању f од темена O наћи једначину $x = x(r)$ те површи, где је x координата дуж осе система која се мери од темена O и где је r растојање од осе. Колики је максималан полупречник $r_{\max}$ снопа светлости који се може сабрати? (16 п.)



Слика 3



Слика 4

Задатке припремили: Славица Спасовић и мр Ђорђе Спасојевић
Рецензент: мр Ђорђе Спасојевић

ОПШТА ГРУПА
Теоријски задаци

Приликом решавања задатака можете користити следеће формуле:

- $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$;
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$;
- $(1+x)^n = 1 + nx$, за $|x| \ll 1$;
- $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$;
- $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$;
- $1 + \cos\alpha + \cos 2\alpha + \cdots + \cos(N-1)\alpha = \dfrac{\sin\frac{N\alpha}{2}\cos\frac{N-1}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}$;
- $\sin\alpha + \sin 2\alpha + \cdots + \sin(N-1)\alpha = \dfrac{\sin\frac{N\alpha}{2}\sin\frac{N-1}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}$;
- $a\cos\omega t + b\sin\omega t = \sqrt{a^2+b^2}\cos(\omega t - \varphi)$, где је $\mathrm{tg}\varphi = \dfrac{b}{a}$;

- $\langle\cos^2(\omega t+\varphi)\rangle = \langle\sin^2(\omega t+\varphi)\rangle = \dfrac{1}{2}$;
- $\langle\sin(\omega t+\varphi)\,\cos(\omega t+\varphi)\rangle = 0$;
- $\langle c_1\, f_1(t) + c_2\, f_2(t)\rangle = c_1\langle f_1(t)\rangle + c_2\langle f_2(t)\rangle$.

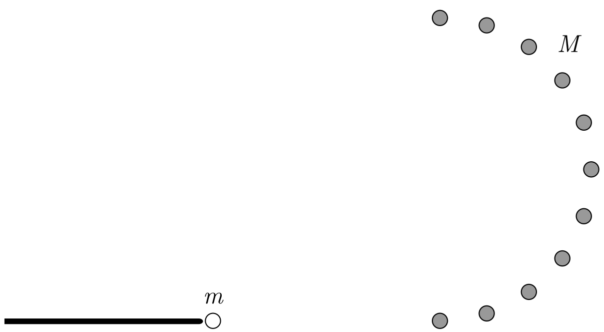
Заграда $\langle f(t)\rangle = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)\mathrm{d}t$ – означава усредњавање по периоду $T = 2\pi/\omega$.

1. задатак – Еластични судари

Нерелативистичка честица масе m_1 еластично се судара са честицом масе $m_2 < m_1$ која мирује. При томе честица m_1 скреће за угао θ.

а) Нађите максималну вредност угла θ. (6 п.)

На хоризонталном билијарском столу налази се N идентичних, шарених билијарских кугли, једнако размакнутих, које чине полукруг. Укупна маса свих шарених кугли је M. Бела кугла, масе m приближава се полукругу са леве стране (слика 1). Њу је упутио вешт играч билијара, тако да се она еластично одбија од свих N шарених кугли, а ове су постављене баш тако да је угао под којим скреће бела кугла после сваког судара максималан угао скретања којег сте израчунали у задатку под а).



Слика 1.

б) Нађите однос финалне и почетне брзине беле кугле. (4 п.)

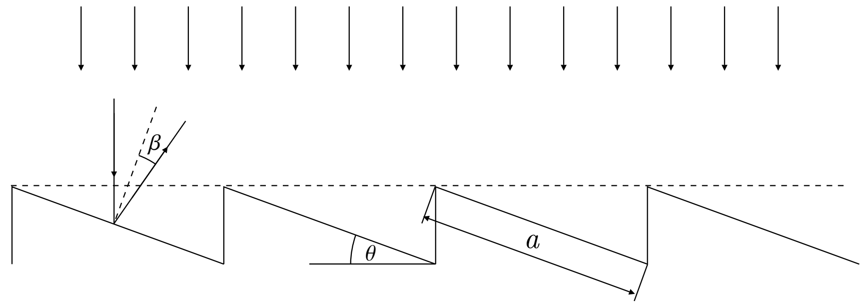
в) Чему је једнак тај однос у лимесу $N \to \infty$ (то заправо значи да маса сваке шарене кугле M/N тежи нули, док је маса свих шарених кугли коначна и износи M)? Колики треба да буде однос M/m да би овај ефектан потез био могућ? (5 п.)

Сада поново размотрите еластичан судар две честице са почетка задатка. Овог пута претпоставите да се честица масе m_1 приближава кугли m_2 релативистичком брзином.

г) Експлицитним рачуном одредите максималан угао θ под којим скреће кугла масе m_1. Упоредите резултат са нерелативистичким случајем. (10 п.)

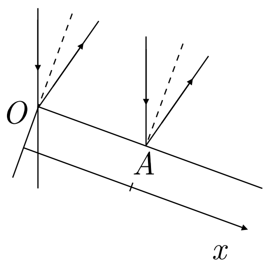
2. задатак – Рефлексиона дифракциона решетка

Рефлексиона дифракциона решетка се добија тако што се на металну површ уреже „тестерасти профил”.



Слика 2.

Угао θ и дужина a су познати. На металну површ пада раван монохроматски електромагнетни талас, чија је таласна дужина λ. У овом задатку размотрите проблем дифракције светлости на решетки. Крајњи задатак је да одредите интензитет зрачења електромагнетног таласа рефлектованог под неким углом β од решетке. На почетку размотрите само један зубац решетке. Свака тачка на површи зупца погођена таласом постаје и сама извор нових, секундарних таласа *(Хајгенсов принцип)*. Ако је E_0 амплитуда упадног таласа, онда је јачина поља рефлектованог таласа са дела дужине $\mathrm{d}x$ дата изразом $\frac{E_0}{a}\mathrm{d}x\cos(\omega t + \phi(x))$, где је $\phi(x)$ фаза у тачки A (слика 3). Почетна фаза зрака који се рефлектује од највише тачке првог зуба, када се посматра на екрану је 0.



Слика 3

а) Одредите укупну јачину поља $E_{(1)}$ које се рефлектује под углом β и нађите амплитуду поља. (9 п.)

Интензитет зрачења је пропорционалан квадрату укупне јачине поља $I = \kappa E_{(1)}^2$. Интензитет зрачења је временски брзо променљива функција. У експериментима се не мери сам интензитет, већ средња вредност ове величине усредњена по једном периоду $\langle I\rangle$.

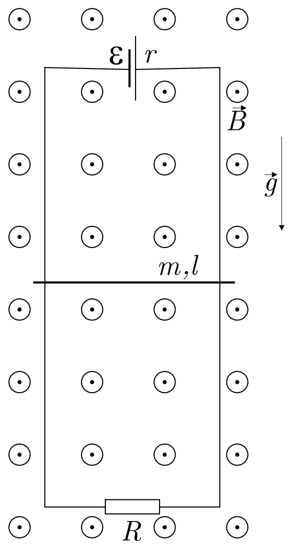
б) Нађите средњи интензитет зрачења са једног зупца дифракционе решетке. (3 п.)
в) Израчунајте интензитет рефлектованог зрачења под углом $\beta = \theta$. (3 п.)
г) Колика је угаона ширина централног дифракционог максимума? (3 п.)

Вратимо се сад на дифракциону решетку са N зубаца. Јачина електричног поља електромагнетног таласа, рефлектованог под углом β од првог зупца је израчуната у делу а) овог задатка. Поље од сваког наредног зупца укључује и одговарајућу фазну разлику.

д) Колика је укупна јачина поља E рефлектована под углом β од дифракционе решетке? (6 п.)
ђ) Одговорите чему је једнака средња вредност интензитета зрачења $\langle I \rangle$? (3 п.)

3. задатак – Три независна задатка

а) По двема вертикалним проводним шипкама, повезаним у дну отпорником R, а на врху батеријом електромоторне силе $\mathcal{E}$ и унутрашњег отпора r клизи без трења проводник дужине l и масе m (слика 4). Систем се налази у хомогеном магнетном пољу јачине B које је нормално на раван цртежа, а усмерено ка нама. Нађите успостављену брзину v проводника у константном гравитационом пољу. Отпоре шипки и проводника можете занемарити. (6 п.)



Слика 4

б) У хоризонталном цилиндру, затвореном на оба краја и напуњеном идеалним гасом експонента адијабате γ, налази се клип масе m и површине попречног пресека S. У равнотежном положају притисак гаса је p_0 и клип дели цилиндар на два једнака дела, при чему је запремина једног дела једнака V_0. Нађите учестаност малих осцилација клипа око равнотежног положаја. Процес у гасу је адијабатски, а трење се може занемарити. (6 п.)

в) Пацијенту је убризган радиоактивни ^{24}Na активности $A = 2 \cdot 10^3$ расп./s и времена полураспада 14,9 h. После 5 часова измерена је активност 1 cm^3 крви и установљено је да она износи 15 расп./min. Ако претпоставимо да ткива организма нису апсорбовала радиоактивну супстанцу (тј. да се она „задржала" само у крви) наћи запремину крви у организму. (6 п.)

Задатке припремили: др Воја Радовановић и Душко Латас
Рецензент: др Воја Радовановић

ДРУГИ И ТРЕЋИ РАЗРЕД И ОПШТА ГРУПА
Експериментални задаци

Мерни комплет

Потребна мерења се врше комплетом који садржи:
1) шприц са шупљом иглом,
2) хронометар,
3) жичани држач шприца,
4) посуда у коју истиче течност,
5) течности чије се физичке особине одређују.

При мерењима и израчунавањима водите рачуна о следећем:
1) **Не палите отворен пламен у близини мерног комплета.**
2) Пажљиво рукујте иглом да се не бисте повредили.
3) Пажљиво рукујте шприцом и иглом, да не бисте откинули иглу од шприца.
4) У току мерења шприц и иглу поставите у приближно вертикалан положај на држачу.
5) Димензије игле: унутрашњи полупречник: 0.25 ml, спољашњи полупречник: $R = 0.4$ ml, дужина игле: дата уз мерни комплет.
6) Познате константе: густина воде $\varrho_в = 1000$ kg/m^3, густина етил-алкохола: $\varrho_а = 900$ kg/m^3, убрзање Земљине теже: $g = 9.81$ m/s^2.
7) Грешке величина наведених у претходним тачкама могу се занемарити

Задатак 1. Мерење коефицијента вискозности течности

Коришћењем расположивог уређаја измерите коефицијент вискозности етил-алкохола. Процените грешке ваших мерења. (12 п.)

Теоријски увод:

Протицање вискозне течности кроз капилару описује се једначином:

$$\frac{V}{t} = \frac{1}{\eta}\frac{r^4\pi}{8l}\,(p_1 - p_2)\,,$$

где су: η – коефицијент вискозности течности, V – запремина течности која протекне за време t кроз капилару дужине l и полупречника r, и p_1 и p_2 – притисци на улазу и на излазу из капиларе.

Напомене:

1) Занемарите брзину спуштања течности у шприцу у односу на брзину течности у капилари.
2) Сматрајте да брзина протицања течности кроз капилару не зависи од величине капљице формиране на крају игле.
3) Препоручујемо да пратите истицање по $0,4$ ml течности, уз паузе од по $0,2$ ml, између два мерења.
4) Занемарите промену разлике притисака $p_1 - p_2$ у току истицања $0,4$ ml течности кроз капилару.
5) Средњу висину стуба течности мерите лењиром уз одговарајући поступак који обезбеђује што је могуће мању грешку мерења.

Задатак 2. Мерење коефицијента површинског напона течности

2.а. Коришћењем расположивог мерног комплета измерите коефицијенте површинског напона воде и етил-алкохола. Процените грешке ваших мерења. (5 п.)

2.б. Одредите концентрације алкохола у води за две смеше непознатих концентрација, означене бројевима 1 и 2. Процените грешке ових мерења. (8 п.)

***Напомена*:** Коефицијент површинског напона смеше две течности зависи од коефицијената површинског напона тих течности и њиховог удела у смеши.

Задатак 3. Зависност коефицијената вискозности и површинског напона течности од температуре

Коефицијент вискозности и коефицијент површинског напона зависе од температуре течности. Мерењем процените да ли је расположивим мерним комплетом могуће мерити зависност ових коефицијената од температуре, уз одговарајуће додатке уређају који би обезбеђивали промену и мерење температуре течности и уређаја. Мерења у овом задатку вршите на води собне температуре и води на температури знатно вишој од собне.

Образложите поступак вашег мерења и начин извођења закључака. (5 п.)

Задатке припремили: др Мићо Митровић и мр Андријана Жекић

РЕШЕЊА

ШЕСТИ РАЗРЕД

1. Са t_1 означимо време од почетка кретања Аце и Боре до сусрета Боре и Цанета, са t_2 до сусрета Цанета и Аце и са t време које показује колико је раније (или касније) кренуо Цане у односу на Ацу и Бору. За дефинисана времена може се поставити систем једначина: $v_1t_1+v_2(t_1+t) = d$, $v_2t_2 + v_2(t_1 + t) + v_1(t_2 - t_1) = d$, $t_2 + \dfrac{d - v_2t_2}{v_1} = t_1 + \dfrac{d - v_1t_1}{v_2}$. Ако заменимо бројне вредности $v_1 = 15$ km/h, $v_2 = 5$ km/h и $d = 15$ km и средимо једначине, добија се $4t_1+t = 3$, $4t_2-2t_1+t = 3$, $t_2+3t_1 = 3$. Из овог система једначина налазимо $t_1 = \frac{2}{3}$ h $= 40$ min, $t_2 = 1$ h $= 60$ min и $t = \frac{1}{3}$ h $= 20$ min. Ово значи да Цане треба да крене 20 min раније да би Аца и Бора стигли истовремено у Н.

2. Време потребно до поласка воза може да се напише на два начина: $t = \dfrac{s}{v_1} - 20$ min, $v_1 = 3$ km/h и $s_1 = 3$ km и $t = \dfrac{s}{v_1} + \dfrac{s - s_1}{v_2} + 40$ min, $v_2 = 3,5$ km/h. На основу двеју претходних једначина може да се напише једначина $\dfrac{s}{v_1} - 20\text{ min} = \dfrac{s_1}{v_1} + \dfrac{s}{v_2} - \dfrac{s_1}{v_2} + 40$ min. Сређивањем ове једначине добија се $s = s_1 = \dfrac{v_1v_2}{v_2 - v_1} \cdot 60$ min. Заменом бројних вредности добија се $s = 24$ km.

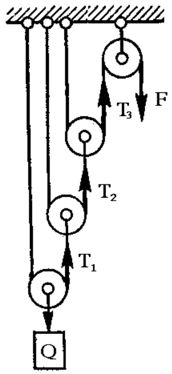
3. Ако због услова задатка посматрамо време и минутама, тада је $t = 180$ min, а растојање од А до Б нека је d мерено у километрима. На основу оваквих података може се да се постави једначина $\dfrac{t}{d+6}+1 = \dfrac{1}{d}$. Заменом t имамо једначину $\dfrac{180 + d + 6}{d + 6} = \dfrac{180}{d}$. Даљим сређивањем ове једначине добија се једначина $d(d + 6) = 1080$. Ако десну страну напишемо у облику производа два броја па од свих чинилаца тражимо оне који се разликују за 6, добијамо $d(d + 6) = 30 \cdot 36$, што значи да је растојање од А до Б $d = 30$ km и, наравно, растојање од Ц до Б 36 km.

4. Збир маса учесника у смеши једнак је маси смеше па важи релација $K(V_1 + V_2)\varrho = V_1\varrho_\text{в} + V_2\varrho_\text{а}$. $K = 0,97$ је дато смањење запремине. Из дате релације лако налазимо $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{K\varrho - \varrho_\text{а}}{\varrho_\text{в} - K\varrho}$. Заменом бројних вредности добијамо $V_1/V_2 = 0,57$.

5. Тежина тела у ваздуху може да се напише као $P_1 = \varrho GV - \varrho_1 GV$. Из ове релације је $V = P_1/[(\varrho - \varrho_1)G]$. У води важи релација $\varrho GV - \varrho_0 GV = P_2$. Ако овде заменимо запремину из претходне релације и средимо, добија се за тражену густину $\varrho = \dfrac{\varrho_0 P_1 - \varrho_1 P_2}{P_1 - P_2}$. Заменом бројних вредности добијамо $\varrho = 2,250 \cdot 10^3\ \mathrm{kg/m^3}$.

СЕДМИ РАЗРЕД

1. Кретање првог аутомобила описано је једначином $s_1 = At + Bt^2$ што је временска зависност пута од времена типа $s_1 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$, одатле закључујумео да се први аутомобил креће равномерно убрзано почетном брзином $v_0 = A = 2$ m/s и убрзањем $a = 2B = 1\ \mathrm{m/s^2}$. Први аутомобил полази из координатног почетка тј. за $t = 0$ следи $s_1 = 0$. Закон пута за други аутомобил је $s_2 = C + Dt$ што је зависност типа $s_2 = s_0 - vt$, где је $s_0 = C = 100$ m, а $v = 4$ m/s. Дакле, други аутомобил у почетном тренутку ($t = 0$) се налази на растојању $s_0 = 100$ m од координатног почетка, а затим се креће равномерно брзином $v = 4$ m/s у сусрет првом аутомобилу.



а) После пет секунди кретања први аутомобил биће на растојању $s_1 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 = 22,5$ m од почетне тачке, а други аутомобил на растојању $s_2 = 100\ \mathrm{m} - 4\ \mathrm{m/s} \cdot 5\ \mathrm{s} = 80$ m од координатног почетка. Растојање између аутомобила је $\Delta s = s_2 - s_1 = 57,5$ m.
б) Други аутомобил биће у координатном почетку (на почетном положају првог аутомобила) после времена $t = 25$ s које налазимо из услова $s_2 = 0 = 100\ \mathrm{m} - 4\ \mathrm{m/s} \cdot t$. Први аутомобил за време $t = 25$ s биће на растојању $s_1 = 362,5$ m.
в) Брзина првог аутомобила у зависности од времена биће $v_1 = v_0 + at = 2\ \mathrm{m/s} + 1\ \mathrm{m/s^2} \cdot t$, док брзина другог остаје константна све време $v_2 = const. = 4$ m/s.

2. Нађимо прво силе затезања

$$T_1 = \frac{Q + mg}{2} \quad T_2 = \frac{T_1 + mg}{2} = \frac{\frac{Q+mg}{2} + mg}{2} = \frac{Q}{2^2} + \frac{mg(1+2)}{2^2},$$

$$T_3 = \frac{T_2 + mg}{2} = \frac{Q}{2^3} + \frac{mg(1 + 2 + 2^2)}{2^3} = \frac{1}{8}(Q + 7mg) = 30\ \mathrm{N}.$$

Тражена сила је $F = T_3 = 30$ N.

3. Претпоставимо да смо лоптицу бацили вертикално наниже. Брзина непосредно пре првог удара биће $v_1 = \sqrt{v_0^2 + 2gH}$, док непосредно после првог удара је $v_{01} = \sqrt{\frac{8}{10}}v_1$ (то смо добили из податка да је $8/10$ кинетичке енергије преостало тј. $\frac{mv_{01}^2}{2} = \frac{8}{10}\frac{mv_1^2}{2}$). Тело иде навише до неке висине и при повратку непосредно пре другог удара имаће такође брзину v_{01}. Брзина непосредно после другог удара је $v_{02} = \sqrt{\frac{8}{10}}v_{01} = \frac{8}{10}v_1$ и том брзином тело треба да доспе до висине H односно

$$H = \frac{v_{02}^2}{2g} = \left(\frac{8}{10}\right)^2 \frac{(v_0^2 + 2gH)}{2g},$$

одатле налазимо почетну брзину $v_0 = \frac{3}{4}\sqrt{2gH} = 9,18$ m/s. Напоменимо да се исти резултат добија и уколико се телу зада почетна брзина вертикално навише.

4. Брзина камена непосредно пре удара у препреку је $v = \sqrt{v_0^2 - 2gH} = 13,6$ m/s, како је брзина непосредно после удара једнака нули то је промена брзине једнака $\Delta v = v$. Време за које камен стигне до препреке налазимо из релације $v = v_0 - gt_1$ и оно износи $t_1 = \frac{v_0 - v}{g} = 1,14$ s. Време за које тело слободно пада са висине H је $t_2 = \sqrt{\frac{2H}{g}} = 2,098$ s. Дакле, време за које је дошло до промене брзине је $\Delta t = t_u - (t_1 + t_2) = 0,26$ s. Тражена сила је $F = ma = m\frac{\Delta v}{\Delta t} = 10,46$ N.

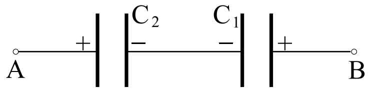
5. Ако је t_s крајња температура у калориметарском суду онда је $m_1 c_1 (t_1 - t_s) = (m_2 - m_3)c_2(t_s - t_2) + m_3 c_2 (t_k - t_2) + m_3 q_i$ где је $t_k = 100$ °C температура кључања воде. Из претходног израза налазимо

$$t_s = \frac{m_1 c_1 t_1 + (m_2 - m_3)c_2 t_2 - m_3 c_2 (t_k - t_2) - m_3 q_i}{m_1 c_1 + (m_2 - m_3)c_2} = 22,3\ ^\circ\mathrm{C}.$$

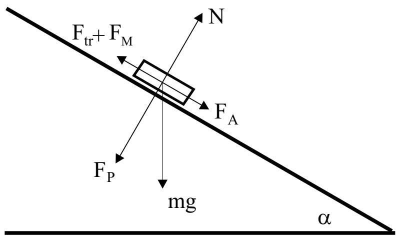
ОСМИ РАЗРЕД
Теоријски задаци

1. Наравно да је најједноставније да се кондензатори напуне из извора и онда сва три елемента вежу редно. Добијамо укупно $U = 3$ V, али то није решење! Први корак је да се кондензатори напуне, а онда, тако напуњени вежу као на слици. При томе је напон између крајева овакве везе $U = 0$ V. Сада можемо овај систем напунити, тј. тачније допунити из извора (пошто у систему већ имамо наелектрисања) и то

тако што позитиван пол извора вежемо за тачку A. Систем се понаша као редна веза капацитета $C_c = \dfrac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = 1.2\ \mu\mathrm{F}$. На кондензатору C_2 ћемо добити додатних $1.2\ \mu\mathrm{C}$, тако да ће његово наелектрисање износити сада $q_2' = 3\ \mu\mathrm{C} + 1.2\ \mu\mathrm{C} = 4.2\ \mu\mathrm{C}$, а напон $U_2' = 1.4$ V. Кондензатор C_1 ће изгубити тих $1.2\ \mu\mathrm{C}$, и њега ћемо допунити из извора. Поново понављамо поступак, само што ће сада систем, тј. кондензатор C_2 примити мање наелектрисања, пошто је систем сада на напону $U = 0.4$ V. Јасно је да ово не може ећи унедоглед, него када напон на кондензатору C_2 постане $U_2 = 2$ V, тада престаје могућност даљег допуњавања! И могло би се учинити да је највећи напон који можемо остварити $U_{\max} = 4$ V (извор + напуњен $C_1 + C_2$), али ни то није коначно решење! Спојимо кондензатор C_2 и напуњен из извора кондензатор C_1 паралелно. Такав систем има капацитет $C_1 + C_2 = 5\ \mu\mathrm{F}$, и садржи наелектрисање $2\ \mu\mathrm{C} + 6\ \mu\mathrm{C} = 8\ \mu\mathrm{C}$. Дакле, напон на сваком кондензатору је сада $U = 1.6$ V, па је укупан напон редне везе извора и оба кондензатора сада 4.2 V, што је коначно решење. Можете се лако уверити да понављање претходне процедуре не доводи до даљег пораста напона.

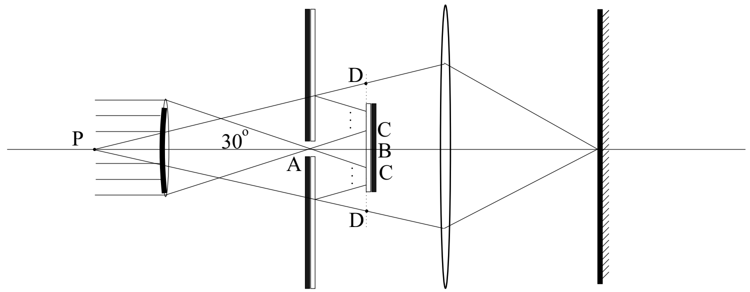


2. Лако је написати једначине за сва три случаја. Први случај (само отпорник R је спојен): $I = \dfrac{\mathcal{E}}{R + r}$. Други случај (спојени су редно отпорник R и R_x): $\dfrac{3}{4} I = \dfrac{\mathcal{E}}{R + R_x + r}$. Трећи случај (спојени су паралелно отпорник R и R_x): $\dfrac{6}{5} I = \dfrac{\mathcal{E}}{\dfrac{RR_x}{R + R_x} + r}$. Дељењем прве и друге једначине добијамо $\dfrac{4}{3} = \dfrac{R + R_x + r}{R + r}$ и одавде можемо изразити r као $r = 3R_x - R$. Дељењем прве и треће једначине добијамо $\dfrac{5}{6} = \left(\dfrac{RR_x}{R + R_x} + r\right) \Big/ (R + r)$ и одавде убацивањем израза за r, и сређивањем израза добијамо: $RR_x + R_x^2 - 2R^2 = 0$, а после уврштавања $R_x^2 + 2R_x - 8 = 0$, тј. $R_x^2 + 2R_x + 1 = 9$, $(R_x + 1)^2 = 3^2$, па је $R_x = 3\ \Omega$.



3. У првом случају је тежина штапа умањена за вредност Амперове силе тако да важи: $F_R' = mg - I_1 Bl$, а у другом случају је увећана: $F_R'' = mg + I_2 Bl$. Одузимајући први израз од другог и имајући у виду да је $F_R' = 2\kappa\Delta x'$ и $F_R'' = 2\kappa\Delta x''$, добијамо: $2\kappa(\Delta x'' - \Delta x') = 2\kappa a = Bl(I_1 + I_2)$. Одавде добијамо да је константа опруге: $\kappa = Bl(I_1 + I_2)/(2a) = 33.75$ N/m.

4. Са слике се види да је услов равномерног кретања штапа једнакост активне силе F_{A} и збира силе трења F_{tr} и магнетне силе F_{M}. Магнетна сила износи $F_{\mathrm{M}} = IBl$, а пошто је струја која тече кроз коло зависна од брзине и отпора R на начин $I = \dfrac{U}{R} = \dfrac{\Delta\phi}{\Delta t R} = \dfrac{Bvl\Delta t}{R\Delta t} = \dfrac{Bvl}{R}$. Заменом у израз за магнетну силу, добијамо њен израз: $F_{\mathrm{M}} = \dfrac{4B^2vl^2}{r}$. Ако се напише једнакост наведених сила, добија се: $\dfrac{\sqrt{3}}{2} mg = \dfrac{1}{2} \mu mg + \dfrac{B^2 l^2 v}{R}$ и изражавајући отпор добијамо $R = 4B^2 l^2 v/(\sqrt{3}\, mg) = 0.12\ \Omega$.



5. Паралелан сноп после пролаза кроз обод првог сочива се сакупља у жижи, тј. у малом отвору, у који долазе само зраци под углом $\alpha = 30°$. Између два одбијања од огледала зраци се од осе OO' удаље за ΔABC, при чему је $BC = d/\sqrt{3}$. Зрак ће претрпети осам одбијања пре напуштања простора између огледала и пасти на сочиво под углом од $\alpha = 30°$, као да долази из тачке P. Њен се положај може одредити из сличности троуглова ΔABC и ΔPBD: $Bc : AB = BD : PB$ $\Rightarrow PB = (BD : BC)AB = 9$ mm. Удаљеност тачке P од заклона је $a + PB - d = 160$ mm. То је уједно и растојање $p + l$, пошто се лик (светла тачка) формира на заклону. Једначина сабирног сочива гласи: $\dfrac{1}{f} = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{l}$ и изражавајући, нпр. p, добијамо: $p = \dfrac{lf}{l - f}$. После уврштавања у израз $p + l = 160$ mm, добијамо после сређивања: $l^2 - 160l = -4800$ (изражено у милиметрима). Врло лако се овај израз своди на квадрат разлике додајући левој и десној страни 6400, тако да добијамо: $(l - 80)^2 = 1600$, одакле следи да је $l = 120$ mm. Сочиво треба да буде удаљено од отвора 152 mm − 120 mm = 32 mm.

Напомена: Слика је само скица и не одговара размерама задатим у задатку!

ПРВИ РАЗРЕД

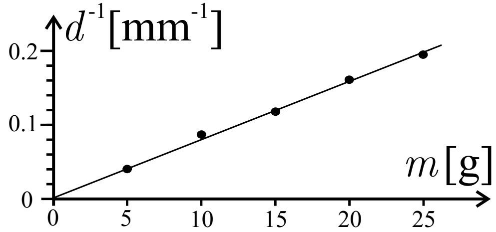
1. Ако интензитет брзине плочице на подлози означимо са u, а интензитет брзине левог клина са v, из закона одржања импулса следи $mu = Mv \Rightarrow v = mu/M$, док је из закона одржања енергије $mgh = mu^2/2 + Mv^2/2$, па након замене израза за v добијамо $u = \sqrt{2gh/(1+m/M)}$. Ако интензитет брзине десног клина у тренутку када се плочица попне на максималну висину h' означимо са V, из закона одржања импулса следи $mu = (m+M)V \Rightarrow V = mu/(m+M)$. Из закона одржања енергије је $mu^2/2 = (m+M)V^2/2 + mgh'$, па је $h' = u^2/2g - (m+M)V^2/2mg$. Ако искористимо добијене изразе за u и V, следи $h' = h/(1+m/M)^2$.

2. а) Ако са ω означимо интензитет угаоне брзине штапа у тренутку удара у подлогу, тада су интензитети брзина куглица једнаки $v_1 = \omega L/3$, $v_2 = 2\omega L/3$ и $v_3 = \omega L$, односно $v_2 = 2v_1$ и $v_3 = 3v_1$. Из закона одржања енергије $mgL/3 + 2mgL/3 + mgL = mv_1^2/2 + mv_2^2/2 + mv_3^2/2$, где је m маса сваке од куглица, заменом израза за v_2 и v_3 добијамо $2mgL = 7mv_1^2$, односно $v_1 = \sqrt{2gL/7}$, $v_2 = 2\sqrt{2gL/7}$ и $v_3 = 3\sqrt{2gL/7}$. За дату вредност дужине L је $v_1 = 1.8\,\mathrm{m/s}$, $v_2 = 3.7\,\mathrm{m/s}$ и $v_3 = 5.5\,\mathrm{m/s}$.

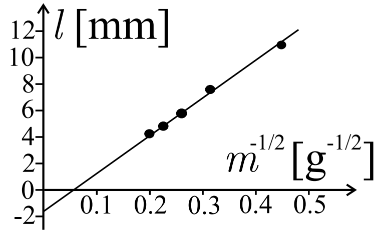
   б) Ако је v интензитет брзине тега у равнотежном положају, важи $mv^2/2 = mgh$, одакле следи $mv^2 = 2mgh$. Како је $T = mg + mv^2/l$, добијамо $T = mg(1 + 2h/l)$. Максимална могућа вредност за h је $h_m = 2l$ и она даје силу затезања интензитета $T_m = 5mg < T_0 = 6mg$, па је свака могућа вредност за h (цео интервал $[0, 2\,l]$) дозвољена.

3. Из закона одржања енергије следи $-\gamma m(M_1+M_2)/r_1 = -\gamma m(M_1+M_2)/r_2 + mv^2/2$, где је m маса брода. Одатле је $M_1 + M_2 = v^2 r_1 r_2/2\gamma(r_1 - r_2)$, односно $M_1 + M_2 = 2.58\cdot 10^{31}\,\mathrm{kg}$. Из III Кеплеровог закона следи $R^3 = \gamma(M_1+M_2)T^2/4\pi^2$, односно $R = 21.7\cdot 10^6\,\mathrm{km}$. Полупречник орбите невидљивог пратиоца је $R_2 = R - R_1 = 13.8\cdot 10^6\,\mathrm{km}$. Пошто оба објекта круже око центра масе, мора да важи $M_1R_1 = M_2R_2 \Rightarrow k = M_1/M_2 = R_2/R_1 = 1.74$, па је $M_1 = (M_1+M_2)/(1+1/k) = 1.64\cdot 10^{31}\,\mathrm{kg} = 8.27M_s$ и $M_2 = (M_1+M_2) - M_1 = 9.40\cdot 10^{3}0\,\mathrm{kg} = 4.75M_s$. Како је $M_2 > 3M_s$, закључујемо да је могуће да је невидљиви пратилац црна рупа.

4. Ако човек стане на један крај чамца и постави га под углом од 90^0 у односу обалу тако да другим крајем додирује обалу, а затим пређе на други крај чамца (ближи обали) крећући се константном брзином интензитета v, чамац ће се удаљавати од обале константном брзином интензитета V и из закона одржања импулса следи $mv = MV$ (брзине мерене у односу на обалу). Ако је t време кретања, l дужина чамца, а x растојање за које се чамац удаљи од обале (l и x могу да се измере помоћу траке за мерење дужине), онда је $mvt = MVt$, а како је $vt = l - x$ и $Vt = x$, добијамо $m(l-x) = Mx$, одакле је $M = m(l/x - 1)$.



Слика 1



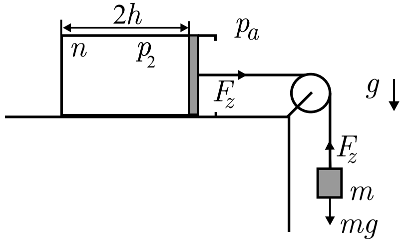
Слика 2

5. Нека је $v_0(m)$ интензитет почетне брзине пројектила масе m. Из једнакости $E_0 = mv_0^2(m)/2$ следи да је $v_0(m) = \sqrt{2E_0/m}$. Ако дубину продирања пројектила масе m означимо са $d(m)$, онда је $v_0^2(m) = 2F(m)d(m)/m$, одакле је $E_0 = F(m)d(m)$, односно $F(m) = E_0/d(m)$. На основу датих података не можемо да нацртамо зависност $F(m)$ јер не знамо вредност E_0, али можемо да нацртамо зависност $F(m)/E_0 = 1/d(m)$, која је приказана на слици 1. У питању је линеарна зависност $F(m)/E_0 = \alpha m$, где је $\alpha \approx 8.0\cdot 10^{-3}\,\mathrm{g^{-1}\,mm^{-1}} = 8.0\cdot 10^3\,\mathrm{kg^{-1}\,m^{-1}}$. Сада је $F(m) = \alpha E_0 m$. У другом експерименту је $l(m) = v_0(m)t_0 - F(m)t_0^2/2m = t_0\sqrt{2E_0/m} - \alpha E_0 t_0^2/2$, па ако нацртамо зависност дебљине плоче l од $x = 1/\sqrt{m}$, добићемо линеарну зависност $l(x) = Ax - B$, где је $A = t_0\sqrt{2E_0}$ и $B = \alpha E_0 t_0^2/2$. Са слике 2 се добија $A \approx 28\,\mathrm{g^{1/2}\,mm} = 8.9\cdot 10^{-4}\,\mathrm{kg^{1/2}\,m}$ и $B \approx 1.6\,\mathrm{mm}$, одакле је $E_0 = A^2/2t_0^2 \approx 0.40\,\mathrm{J}$, односно $E_0 = 2B/\alpha t_0^2 \approx 0.39\,\mathrm{J}$. Видимо да су ове две вредности међусобно сагласне, као што и очекујемо. Коначно, $F(m) = km$, где је $k = \alpha E_0 \approx 3.2\cdot 10^3\,\mathrm{m/s^2}$.

ДРУГИ РАЗРЕД
Теоријски задаци

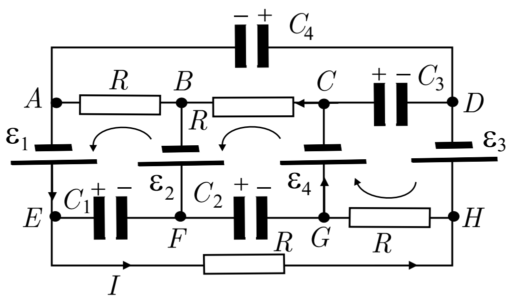
1. У почетном равнотежном стању система је збир силе p_1S притиска гаса p_1 на клип и силе затезања нити $F_z = mg$ уравнотежен силом p_aS спољашњег притиска p_a на клип, одакле је $p_1 = p_a - mg/S = 97.7\,\mathrm{kPa}$. Како је $V_1 = Sh$ почетна запремина гаса, његова температура је

$T_1 = \dfrac{p_1V_1}{nR} = \dfrac{(p_aS-mg)h}{R}$. Када се преграда уклони, гас се расхири по целој запремини суда $V_2 = 2V_1 = 2Sh$. При овом процесу унутрашња енергија гаса се не мења јер је гас топлотно изолован и не врши рад јер се слободно шири. Како је унутрашња енергија идеалног гаса функција само његове температуре, следи да након слободног ширења гаса његова температура остаје непромењена ($T_2 = T_1$), па је новоуспостављени притисак $p_2 = nRT_2/V_2 = nRT_1/2V_1 = p_1/2$. Када се клип ослободи он ће, будући да је $p_2 < p_1$, кренути налево ка новом равнотежном положају у којем је притисак гаса p поново једнак p_1. Тада се у систему јављају слабо пригушене адијабацке осцилације након чијег гашења ће се систем наћи у коначном равнотежном стању (p, V) које лежи на истој адијабати као и стање (p_2, V_2). Запремина коначног равнотежног стања је $V = S(2h - \Delta h)$, где је смањење висине гасног стуба Δh уједно и померање тега из почетног у коначни равнотежни положај које налазимо из једначине адијабате $p_2V_2^{\gamma} = pV^{\gamma}$, одакле је $\Delta h = 2h(1 - 2^{-1/\gamma}) = 0.781$ m. Коначна температура гаса је $T = pV/nR = 430$ K.



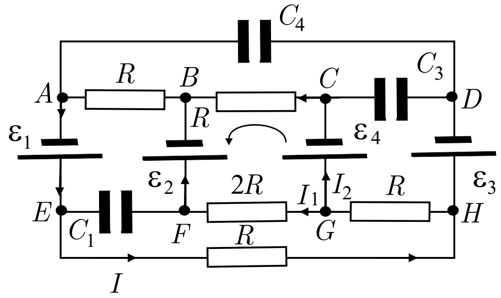
Ентропија система ће се мењати само при слободном ширењу гаса, јер је процес осциловања клипа адијабацки. Како је $\Delta S = \frac{\Delta Q}{T}$, а $\Delta Q = nRT \ln \frac{V_2}{V_1}$, јер је процес ширења гаса изотермски, то је промена ентропије у овом процесу једнака $\Delta S = R \ln \frac{V_2}{V_1} = R\ln 2 = 5.76$ J/K.

2. Еквивалентна шема кола је приказана на слици 1. Кроз гране BF и DH не тече струја (извори $\mathcal{E}_2$ и $\mathcal{E}_3$ су везани једним својим крајем за кондензаторе). Струја тече кроз контуру $AEHGCBA$. Друго Кирхофово правило примењено на ову контуру даје $I = \frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_4}{4R} = -\frac{\mathcal{E}}{2R}$ (знак $-$ говори да је смер струје супротан претпостављеном). Да би одредили наелектрисања на кондензаторима, треба прво одредити напоне на сваком од њих (U_i, $i = 1\ldots 4$).



Слика 1

Примењујући друго Кирхофово правило на контуре $ABFEA$, $BCGFB$, $CDHGC$ и $AEHDA$ добија се $U_1 = -\frac{3}{2}\mathcal{E}$, $U_2 = \frac{\mathcal{E}}{2}$, $U_3 = -\frac{3}{2}\mathcal{E}$ и $U_4 = \frac{\mathcal{E}}{2}$ (сада $-$ знаци говоре да су плоче кондензатора наелектрисане супротно претпоставци са слике). Одавде је $q_1 = \frac{3}{2}C\mathcal{E}$, $q_2 = \frac{1}{2}C\mathcal{E}$, $q_3 = 3C\mathcal{E}$ и $q_4 = C\mathcal{E}$. Када се уместо кондензатора C_2 у коло веже отпорник $2R$ добија се коло са слике 2. Ако се претпоставе струје као на слици, ослобођена топлота на отпорнику $2R$ ће бити $Q = 2I_1^2Rt$, па треба одредити струју I_1. Примењујући прво Кирхофово правило у тачки G добија се $I = I_1 + I_2$. Друго Кирхофово правило се може применити на контуре $AEHGCBA$ и $BFGCB$. Тако се добијају једначине $R(3I + I_2) = -2\mathcal{E}$ и $2I_1 = I_2$. Решавајући овај систем једначина по I_1 добија се $I_1 = -\dfrac{2\mathcal{E}}{11R}$, па је ослобођена топлота за време t једнака $Q = \dfrac{8\mathcal{E}^2t}{121R}$.

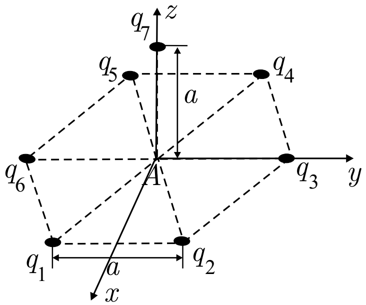


Слика 2

3. Нека се ниво воде у суду спусти за x. Бернулијева једначина примењена на пресеке 1 (горња површина воде) и 2 (отвор на дну суда) гласи $\varrho\frac{v_1^2}{2} + \varrho g(H-x) + p_a + \frac{Mg}{S_1} = \varrho\frac{v_2^2}{2} + p_a$. Користећи једначину континуитета $S_1v_1 = S_2v_2$, добија се $v_1^2 = 2g\left(\frac{S_2}{S_1}\right)^2\left(H + \frac{M}{\varrho S_1} - x\right)$, где је искоришћено да је $\left(\frac{S_2}{S_1}\right)^2 \gg 1$. Како ова једначина има облик $v^2 = v_0^2 - 2as$, где је $a = g\left(\frac{S_2}{S_1}\right)^2$, види се да се брзина спуштања нивоа воде мења и то равномерно успорено успорењем a. За $x = 0$ добија се почетна брзина $v_{10} = \left(\frac{S_2}{S_1}\right)\sqrt{2g\left(H + \frac{M}{\varrho S_1}\right)}$, а за $x = H$ (сва течност је истекла из суда) крајња брзина $v_1 = \left(\frac{S_2}{S_1}\right)\sqrt{2g\frac{M}{\varrho S_1}}$. Време потребно да сва вода истече из суда је $t = \dfrac{v_{10} - v_1}{a} = \frac{S_1}{gS_2}\left(\sqrt{2g\left(H + \frac{M}{\varrho S_1}\right)} - \sqrt{2g\frac{M}{\varrho S_1}}\right) = 23.4$ s.

4. Када би бакарни диск био ван плоче од никла, загревањем од t_1 до t_2 променио би радијус на $r_2 = r(1 + \alpha_2\Delta t)$, где је $\Delta t = t_2 - t_1$. Кружни отвор у плочи би (да у њега није уметнут бакарни диск) при том повећао свој полупречник на $r_1 = r(1 + \alpha_1\Delta t)$. Како је

$\alpha_2 > \alpha_1$ види се да би се полупречник бакарног диска повећао више него што би то дозволио кружни отвор. Због тога се јављају еластичне силе које са једне стране сабијају бакарни диск, а са друге стране повећавају полупречник отвора. Као последица деловања тих сила полупречници диска и отвора ће се променити за исто Δr, које је $\Delta r_1 < \Delta r < \Delta r_2$, где су $\Delta r_2 = r\alpha_2\Delta t$ и $\Delta r_1 = r\alpha_1\Delta t$. Притисак који се јавља на граници два метала може се наћи коришћењем Хуковог закона за еластичне деформације. Наиме, пошто би радијус бакарног диска требало да буде r_2, а он је мањи од те вредности, следи да је диск сабијен и да је релативна деформација $\delta = (\Delta r_2 - \Delta r)/r_2$. Она је, са друге стране, пропорционална сили која делује нормално на јединицу површине $\delta = (1/E_2)(F/S) = (1/E_2)p$, одакле је $p = E_2\dfrac{r\alpha_2\Delta t - \Delta r}{r(1+\alpha_2\Delta t)}$. На сличан начин (примењујући Хуков закон на отвор) добија се $p = E_1\dfrac{\Delta r - r\alpha_1\Delta t}{r(1+\alpha_1\Delta t)}$. Из последње две једначине се за Δr добија $\Delta r = \dfrac{r\Delta t\left(\alpha_2 + \alpha_1\dfrac{E_1}{E_2}\right)}{1+\dfrac{E_1}{E_2}} = 9.85\ \mu\text{m}$, па је полупречник бакарног диска после загревања $\tilde{r} = r + \Delta r = 20.01$ mm (чланови који су квадратни и вишег степена по α су занемарени). За притисак се онда добија $p = \dfrac{E_1E_2}{E_1+E_2}(\alpha_2-\alpha_1)\Delta t = 1.48\times 10^7$ Pa.



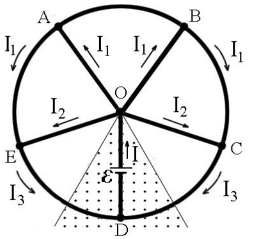
5. Електрично поље које потиче од наелектрисања q_1 и q_4 је $\vec{E}_1 = \dfrac{q}{2\pi\epsilon_0 a^2}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_x + \dfrac{1}{2}\vec{e}_y\right)$. Поље које потиче од наелектрисања q_2 и q_5 је $\vec{E}_2 = \dfrac{q}{2\pi\epsilon_0 a^2}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_x + \dfrac{1}{2}\vec{e}_y\right)$, а поље од наелектрисања q_3 и q_6 је $\vec{E}_3 = \dfrac{q}{\pi\epsilon_0 a^2}\vec{e}_y$, па је поље које потиче од наелектрисања која леже у xy равни $\vec{E}_{xy} = \dfrac{3q}{2\pi\epsilon_0 a^2}\vec{e}_y$. Поље које потиче од наелектрисања q_7 је $\vec{E}_4 = -\dfrac{3q}{4\pi\epsilon_0 a^2}\vec{e}_z$, па је резултујуће поље $\vec{E} = \dfrac{q}{\pi\epsilon_0 a^2}\left(\dfrac{3}{2}\vec{e}_y - \dfrac{3}{4}\vec{e}_z\right)$.

ТРЕЋИ РАЗРЕД
Теоријски задаци

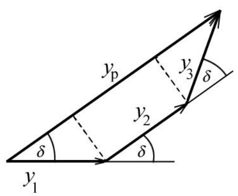
1. Кад штап пређе на храпаву подлогу, на њега делује сила трења која зависи од дужине дела штапа на храпавој подлози. Ако је брзина v по глаткој подлози таква да је $\frac{1}{2}mv^2 \leq \frac{1}{2}\mu mgl$ (кинетичка енергија штапа није већа од рада који изврши сила трења за прелазак целог штапа на другу подлогу), тада ће се штап зауставити пре него што цео пређе на храпаву површину. Кад се на храпавој подлози налази део штапа дужине x, на њега делује сила трења $F = \mu mgx/l$, па се његово кретање до заустављања може посматрати као део хармонијског осциловања од равнотежног до амплитудног положаја. Време таквог кретања је једна четвртина периода, односно $\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{\mu g}}$. Како је $t_1 < \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{\mu g}}$, то значи да ће цео штап прећи на другу подлогу и наставити да се даље креће до заустављања. У тренутку кад је и задњи крај штапа прешао на другу подлогу, његова брзина је $v_1 = v\cos\omega t_1$, а закон одржања енергије даје једначину $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}\mu mgl$, а одатле је $v = \dfrac{\sqrt{\mu gl}}{\sin\omega t_1} = 1.6$ m/s. Након времена t_1, тело се креће до заустављања при деловању константне силе трења $F = \mu mg$. Време које протекне до заустављања је $\dfrac{v\cos\omega t_1}{\mu g}$, па је укупно време кретања по храпавој подлози $t = t_1 + \sqrt{\frac{l}{\mu g}}\,\mathrm{ctg}\,\omega t_1 = 2.0$ s.

2. Док грана OD точка пролази кроз област у којој делује магнетно поље у њој се по Фарадејевом закону индукује електромоторна сила $\mathcal{E} = -\Delta\Phi/\Delta t = -\frac{1}{2}B\omega r^2$ (слика 1). Како је точак затворена проводна контура у њој се индукује струја. Означимо струју кроз грану DO са I. Гране OA,OB,OC,OD, и OE имају отпорност $R_1 = \frac{\varrho r}{S}$, а гране AB, BC, CD, DE, EA су једнаке и имају отпорност $R_2 = \frac{2\pi\varrho r}{5S}$. Због симетрије система потенцијали у тачкама A и B су једнаки, те кроз грану AB не тече струја. Из симетријских разлога, струје кроз гране OAE и OBC су такође једнаке (означимо их са I_1), као и стује кроз гране OE и OC (означимо их са I_2) и струје кроз ED и CD (означимо их са I_3). Да би нашли ове струје користимо Кирхофова правила. За чворове O и D прво Кирхофово правило даје једначине $I = 2I_1 + 2I_2$ и $I = 2I_3$. Примењујући друго Кирхофово правило на контуре OCD и OBC добијају се две једначине $IR_1 + I_2R_1 + I_3R_2 = \mathcal{E}$ и $I_1(R_1+R_2) - I_2R_1 = 0$.

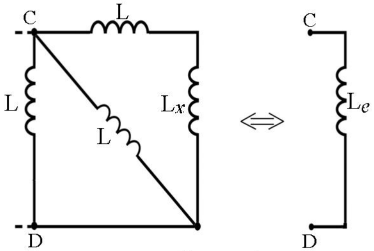
Решавањем система једначина по струјама I, I_1, I_2 и I_3 добија се за $I_1 = \dfrac{R_1\mathcal{E}}{(3R_1+R_2)(R_1+R_2)+R_1(2R_1+R_2)} = \dfrac{B\omega rS}{2(5+2\pi+\frac{4\pi^2}{25})\varrho} =$ 71.2 mA, а то је тражена струја кроз грану OB. Снага која се троши у колу је $P = I\mathcal{E} = \dfrac{2+\frac{2\pi}{5}}{5+2\pi+\frac{4\pi^2}{25}}\dfrac{B^2\omega^2r^3S}{2\varrho} = 4.04$ mW.



Слика 1



Слика 2



Слика 3

3. У некој тачки P на екрану долази до суперпозиције таласа $y_i = y_0\sin(kr_i - \omega t)$, $i = 1,2,3$ која долазе из три кохерентна извора, где су r_i (растојање од i-тог извора до тачке P на екрану) путеви ових таласа. Како по услову задатка растојање L много веће од размака d између извора, путна разлика Δr таласа који стижу из два суседна извора у тачку P је $\Delta r = d\sin\theta$, па је одговарајућа фазна разлика $\delta = \frac{2\pi}{\lambda}d\sin\theta$. Резултујући талас у тачки P је $y_P = y_0\sin(kr_1-\omega t)+y_0\sin(kr_1-\omega t+\delta)+y_0\sin(kr_1-\omega t+2\delta)$, а амплитуду y_{P0} овог таласа можемо одредити на основу векторског слагања таласа (слика 2). Са слике се види да је амплитуда резултујућег таласа $y_{P0} = y_0 + 2y_0\cos\delta$. Како је интезитет пропорционалан квадрату амплитуде, онда је интезитет резултујућег таласа $I = I_0(1+2\cos\delta)^2$, где смо са I_0 означили интезитет таласа који полази од једног извора. Услов за постојање минимума је $I = 0$, односно $1 + 2\cos\frac{2\pi}{\lambda}d\sin\theta = 0$. Најмањи угао θ који испуњава овај услов је управо угао под којим се види први минимум, а то је $\theta_m = \arcsin(\frac{\lambda}{3d})$.

4. Дато коло се састоји од завојнице L_x и низа сегмената од којих се сваки састоји од три једнаке завојнице индуктивитета L. Нека је L_e еквивалентни индуктивитет између тачака C и D (слика 3) кола које образује један сегмент и завојница L_x (тада је $\frac{1}{L_e} = \frac{1}{L} + \frac{1}{L} + \frac{1}{L+L_x}$, а одатле је $Le = \frac{L(L+L_x)}{3L+2L_x}$). Додавањем новог сегмента овом колу добија се слично коло , само што у њему завојница L_x има еквивалентни индуктивитет L_e. Индуктивитет овако добијеног кола биће опет L_e само ако је је $L_e = L_x$. Ако је овај услов испуњен, индуктивитет кола не зависи од броја сегмената јер се не мења додавањем нових сегмената колу. Из услова $L_e = L_x$, добија се једначина $2L_x^2 + 2LL_x - L^2 = 0$, чија су решења $L_{x1} = \frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)L$ и $L_{x2} = -\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)L$.Како физички смисао има само прво решење , то је онда тражена индуктивност $L_{x1} = \frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)L$, одакле је однос $m = \frac{L_x}{L} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

5. Из услова једнакости дужина оптичких путева свих зрака који се сабирају у жижи F налазимо једначину $nf = x(r) + n\sqrt{r^2+[f-x(r)]^2}$, на чијој левој страни фигурише дужина оптичког пута зрака који се простире дуж осе система, а на десној дужина оптичког пута зрака који се у вакууму простире на растојању r од осе система. Решавањем ове једначине по $x(r)$ добијамо $x(r) = \dfrac{n}{n+1}f\left[1 \pm \sqrt{1-\dfrac{(n+1)r^2}{(n-1)f^2}}\right]$. Решење са знаком "+" не одговара услову задатка већ имагинарној жижи из које се зраци расипају, тако да једначина тражене површи гласи $x(r) = \dfrac{n}{n+1}f\left[1 - \sqrt{1-\dfrac{(n+1)r^2}{(n-1)f^2}}\right]$. Како за зраке који се сабирају у жижи важи $1 - \dfrac{(n+1)r^2}{(n-1)f^2} \geq 0$, максималан полупречник снопа светлости који се може сабрати износи $r_{\max} = f\sqrt{\dfrac{n-1}{n+1}}$.

ОПШТА ГРУПА
Теоријски задаци

1. задатак

а) Означимо са v_1 интензитет брзине прве честице пре судара, а са u_1 и u_2 интензитете брзина честица 1 и 2 после судара. Нека су θ и φ углови које заклапају вектори брзина честица 1 и 2 после судара са правцем кретања честице 1 пре судара. Закони одржања енергије и импулса дају три скаларне једначине: $\frac{1}{2}m_1v_1^2 = \frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2$; $m_1v_1 = m_1u_1\cos\theta + m_2u_2\cos\varphi$; $0 = m_1u_1\sin\theta - m_2u_2\sin\varphi$. Елиминацијом брзине друге честице u_2 и угла φ добија се веза између θ и u_1: $\cos\theta = \left[u_1^2(1+\frac{m_2}{m_1}) + v_1^2(1-\frac{m_2}{m_1})\right]/[2v_1u_1]$. Максимум ове функције се добија из услова $\dfrac{\mathrm{d}\cos\theta}{\mathrm{d}u_1} = 0 \Rightarrow u_1 = v_1\sqrt{\dfrac{m_1-m_2}{m_1+m_2}}$ па је $\cos\theta_{\max} = \sqrt{1-\dfrac{m_2^2}{m_1^2}} \Rightarrow \sin\theta_{\max} = \dfrac{m_2}{m_1}$.

б) Примењујући резултате из претходног дела задатка видимо да је након N судара однос финалне v_f и иницијалне v_i брзине $\dfrac{v_f}{v_i} = \left(\dfrac{m-\frac{M}{N}}{m+\frac{M}{N}}\right)^{N/2}$.

в) У лимесу $N\to\infty$ добијамо да је $\sin\theta_{\max} = \dfrac{M}{Nm} \approx \theta_{\max} = \dfrac{\pi}{N} \Rightarrow \dfrac{M}{m} = \pi$, па је $\lim\limits_{N\to\infty}\dfrac{v_f}{v_i} = e^{-M/m} = e^{-\pi}$.

г) Услов еластичног судара у релативистичком случају даје три једначине (закони одржања енергије и импулса): $E_1 + m_2c^2 = E_1' + E_2'$; $p_1 = p_1'\cos\theta + p_2'\cos\varphi$; $0 = p_1'\sin\theta - p_2'\sin\varphi$. Углови скретања су уведени на истоветан начин као у првом делу задатака, а E_1 и p_1 су енергија и импулс честице 1 пре судара, E_1' и E_2' енергије честица 1 и 2 респективно после судара, p_1' и p_2' су одговарајући импулси. Маса мировања честице 2 је m_2. Релативистичка веза између енергије и импулса је $pc = \sqrt{E^2 - m^2c^4}$. Када се та веза убаци у горњи систем (елиминишемо импулсе), а потом елиминишемо и угао φ и енергију E_2' добићемо следећу везу између угла θ и енергије E_1'

$$\cos\theta = \frac{E_1'\left(\dfrac{E_1}{c^2} + m_2\right) - E_1m_2 - m_1^2c^2}{\sqrt{\dfrac{E_1^2}{c^2} - m_1^2c^2}\sqrt{\dfrac{E_1'^2}{c^2} - m_1^2c^2}}.$$

Максимум угла θ се добија на стандардан начин $\dfrac{\mathrm{d}\cos\theta}{\mathrm{d}E_1'} = 0 \Rightarrow E_1' = \dfrac{E_1 + m_2c^2}{1 + \frac{E_1m_2}{m_1^2c^2}}$, па се то врати у израз за $\cos\theta$, из чега се добија $\cos\theta_{\max} = \sqrt{1 - \dfrac{m_2^2}{m_1^2}} \Rightarrow \sin\theta_{\max} = \dfrac{m_2}{m_1}$. Интересантно је приметити да је релативистички случај исти као и нерелативистички, односно, релативистичка корекција на максималан угао скретања прве честице је нула!

2. задатак

а) Размотримо два таласа: један пада у тачки O а други у тачки A, на растојању $x = OA$. Путна разлика за та два таласа је $x(\sin\theta - \sin\beta)$. Укупна јачина поља која се рефлектује под углом β је:

$$\begin{aligned} E_{(1)} &= \int_0^a \frac{E_0}{a}\cos[\omega t - k(\sin\theta - \sin\beta)x]\mathrm{d}x \\ &= \frac{E_0}{a\Delta}\left[\sin\omega t\,(1 - \cos a\Delta) + \cos\omega t\sin a\Delta\right], \end{aligned}$$

где је $\Delta = k(\sin\theta - \sin\beta)$. Овде је $k = 2\pi/\lambda$ интензитет таласног вектора. Даље је $E_{(1)} = E_0\dfrac{\sin\frac{a\Delta}{2}}{\frac{a\Delta}{2}}\cos(\omega t + \varphi)$. Овде је $\mathrm{tg}\varphi = \dfrac{\cos a\Delta - 1}{\sin a\Delta}$.

Амплитуда зрачења је $E_{(1)}^0 = E_0\dfrac{\sin\frac{a\Delta}{2}}{\frac{a\Delta}{2}}$.

б) Укупан интензитет зрачења са једног зупца усредњен по периоду је $\langle I_{(1)}\rangle = \dfrac{\kappa E_0^2}{2}\dfrac{\sin^2\frac{a\Delta}{2}}{\left(\frac{a\Delta}{2}\right)^2}$.

в) Интензитет рефлектованог зрачења под углом $\beta = \theta$ је $\langle I_{(1)}(\theta)\rangle = \dfrac{\kappa E_0^2}{2}$, и то је максималан интензитет.

г) Централни дифракциони максимум се налази на углу $\beta = \theta$. Њему најближи минимум се појављује под углом $\beta = \arcsin(\sin\theta - \lambda/a)$. Стога је угаона ширина центалног дифракционог максимума $\gamma = 2\left[\arcsin\left(\sin\theta - \dfrac{\lambda}{a}\right) - \theta\right]$.

д) Фазни помак између $i-$тог и првог зупца је

$$\delta_i = (i-1)k\Delta s = (i-1)\delta.$$

Овде је $\Delta s = a\cos\theta\sin(\theta+\beta)$ путна разлика између два зупца. Стога је јачина поља која се релектује под углом β

$$\begin{aligned} E &= E_{(1)}^0\cos(\omega t + \varphi) \\ &+ E_{(1)}^0\cos(\omega t + \varphi + \delta)r \\ &+ E_{(1)}^0\cos(\omega t + \varphi + 2\delta) \\ &+ \ldots \\ &+ E_{(1)}^0\cos\left[\omega t + \varphi + (N-1)\delta\right]. \end{aligned}$$

Применом образаца из математичког додатка, добија се да је тражена јачина поља

$$E = E^0_{(1)} \frac{\sin \dfrac{N\delta}{2}}{\sin \dfrac{\delta}{2}} \cos\left(\omega t + \varphi + \frac{N-1}{2}\delta\right).$$

ђ) Из последњег израза се добија да је средња вредност интензитета зрачења

$$\langle I \rangle = \frac{\kappa E_0^2}{2} \frac{\sin^2 \dfrac{a\Delta}{2}}{\left(\dfrac{a\Delta}{2}\right)^2} \frac{\sin^2 \dfrac{N\delta}{2}}{\sin^2 \frac{\delta}{2}}.$$

3. задатак

а) Када се успостави константна брзина, гравитациона сила се изједначи са Амперовом

$$mg = IlB \ .$$

Кирхофљева правила примењена на коло дају једначине

$$\mathcal{E} = rI_1 + RI_2 \ , \quad \mathcal{E} + Blv = rI_1 \ , \quad I_1 = I + I_2 \ .$$

Решавањем овог система од 4 једначине добија се да је успостављена брзина

$$v = \frac{mgr - \mathcal{E}Bl}{B^2 l^2 \left(1 + \frac{r}{R}\right)}.$$

б) Пошто је процес адијабатски онда је $pV^\gamma = p_0 V_0^\gamma$. Када се клип помери за малу вредност x у страну, на њега делује сила која је једнака $F = p_2 S - p_1 S$. Ако са L означимо дужину половине цилиндра и искористимо једначину адијабате,

$$F = p_0 S \left[\left(\frac{L}{L+x}\right)^\gamma - \left(\frac{L}{L-x}\right)^\gamma\right].$$

Ако последњи израз развијемо по малом параметру x/L, добићемо да је сила $F = -2\frac{p_0 \gamma S}{L} x$. Када се елиминише $L = V_0/S$ добија се да је једначина кретања клипа

$$ma = -\frac{2p_0 \gamma S^2}{V_0} x,$$

из чега се чита сопствена фреквенца малих осцилација клипа

$$\omega = \sqrt{\frac{2p_0\gamma}{mV_0}} S.$$

в) Активност укупне запремине крви после 5 h износи $1,588 \cdot 10^3$ расп./s. Како је измерено да $1\,\mathrm{cm}^3$ крви после 5 h има активност 15 расп./min, следи да је запремина крви пацијента

$$V = 6,34\,\mathrm{l}.$$

ДРУГИ И ТРЕЋИ РАЗРЕД И ОПШТА ГРУПА
Експериментални задаци

Задатак 1. Одређивање коефицијента вискозности течности

Мерена су времена истицања течности t_i, запремине $V_0 = 4 \cdot 10^{-7} \mathrm{m}^3$, по три пута за пет различитих висина стуба течности. Висина h је одређена са тачношћу од 0.5 mm. Дужина игле је $l = 41.5$ mm. Минимална апсолутна грешка хронометра је износила 0.2 s. Резултати мерења са процењеним грешкама дати су у табели 1.

Табела 1

h [mm]	38.36 38.4	33.43 33.4	28.52 28.5	23.6 23.6	18.68 18.7
t_i [s]	19.4	21.6	22.0	25.2	27.8
	19.6	20.8	22.6	24.0	27.0
	20.2	21.0	23.5	24.5	27.6
t [s]	19.73 19.7	21.13 21.1	22.7 22.7	24.57 24.6	27.47 27.5
t [s]	0.47 0.5	0.47 0.5	0.8 0.8	0.63 0.7	0.47 0.5
$1/t$ [10^{-2} s^{-1}]	5.07 5.1	4.73 4.7	4.41 4.4	4.07 4.1	3.64 3.6
$\Delta(1/t)$ [10^{-2} s^{-1}]	0.12 0.2	0.11 0.2	0.16 0.2	0.11 0.2	0.06 0.06

Из једначине која описује протицање вискозног флуида кроз струју цев $\frac{V_0}{t} = \frac{r^4\pi\varrho g}{8l\eta}h$, следи линеаризована зависност $\frac{1}{t} = f(h)$: $\frac{1}{t} = \frac{r^4\pi\varrho g}{8l\eta V_0}h$. У табели 1 су дате израчунате вредности потребне за цртање одговарајућег графика из чијег је нагиба a одређен коефицијент вискозности. График је нацртан према незаокруженим бројним вредностима датим у горњем десном углу поља табеле 2.

Са праве је одређен нагиб избором две неекспериментални тачке, A - између прве и друге и B - између последње и претпоследње експерименталне тачке

$$A\,(19.3\ \mathrm{mm},\ 3.72\cdot10^{-2}\ \mathrm{s}^{-1}) \quad \text{и} \quad B\,(37.7\ \mathrm{mm},\ 5.04\cdot10^{-2}\ \mathrm{s}^{-1}):$$

$$a = \frac{(1/t)_B - (1/t)_A}{h_B - h_A} = \frac{(5.04-3.72)\cdot10^{-2}\ \mathrm{s}^{-1}}{(37.7-19.3)\cdot10^{-3}\ \mathrm{m}} = 0.72\ \mathrm{s}^{-1}\mathrm{m}^{-1},$$

$$\frac{\Delta a}{a} = \left(\frac{\Delta\,(1/t)_B - \Delta\,(1/t)_A}{(1/t)_B - (1/t)_A} + \frac{\Delta h_B + \Delta h_A}{h_B - h_A}\right)$$

$$= \left(\frac{0.12+0.11}{5.04-3.72} + \frac{0.5+0.5}{37.7-19.3}\right) = 0.228,$$

$$\Delta a = 0.228\cdot0.72\ \mathrm{s}^{-1}\mathrm{m}^{-1} = 0.16\ \mathrm{s}^{-1}\mathrm{m}^{-1} \approx 0.2\ \mathrm{s}^{-1}\mathrm{m}^{-1},$$

$$a = (0.7\pm0.2)\ \mathrm{s}^{-1}\mathrm{m}^{-1}.$$

Из нагиба правца је одређен тражени коефицијент вискозности течности:

$$\eta = \frac{r^4\pi\varrho g}{8lV_0}\cdot\frac{1}{a} = \frac{\left(0.25\cdot10^{-3}\right)^4\cdot3.14\cdot\ 900\ \cdot9.81}{8\cdot\ 41.5\cdot10^{-3}\cdot\ \ 4\cdot10^{-7}}\cdot\frac{1}{0.72} = 1.13\cdot10^{-3}\ \mathrm{Pa\cdot s}.$$

Запремина је процењена са тачношћу од две петине подеока, тј. $\Delta V_0 = 0.04$ ml, па је

$$\frac{\Delta\,\eta}{\eta} = \frac{\Delta\,V_0}{V_0} + \frac{\Delta\,a}{a} = \frac{0.04}{0.4} + 0.228 = 0.328,$$

$$\Delta\eta = 0.328\cdot1.13\cdot10^{-3}\ \mathrm{Pa\cdot s} = 0.37\cdot10^{-3}\ \mathrm{Pa\cdot s} \approx 0.4\cdot10^{-3}\ \mathrm{Pa\cdot s},$$

$$\eta = (1.1\pm0.4)\cdot10^{-3}\ \mathrm{Pa\cdot s}.$$

Задатак 2. Мерење коефицијента површинског напона течности

Капи се одвајају од игле кад им тежина постане већа од силе површинског напона (приближно једнака), тј. када је $m_{\text{капи}}g = \varrho gV/N = 2\gamma R\pi$, где је N број капи, па је: $\gamma = \frac{\varrho gV}{2\pi R}\frac{1}{N}$, одакле се бројањем капи могу одредити тражени коефицијенти површинског напона воде и етил-алкохола.

Коефицијент површинског напона смеше течности сложено зависи од односа компонената у њој. На основу горњег израза је могуће мерити ове коефицијенте за све течности, мерећи број капи. Међутим, за мерење тражених концентрација довољно је нацртати калибрациону криву зависности $N = f\,(c)$, где је c концентрација једне компоненте смеше у другој. Мерењем броја капи за непознате смеше, са калибрационог графика се одређују концентрације ових смеша.

Мерен је број капи садржаних у запремини од $V = 1$ ml, по три пута за све дате течности са висином стуба течности која омогућава прецизно мерење. Резултати мерења са процењеним грешкама дати су у табели 2. Коефицијенти површинског напона износе:

За воду:

$$\gamma = \frac{\varrho gV}{2\pi R}\frac{1}{N} = \frac{1000\cdot9.81\cdot10^{-6}}{2\pi4\cdot10^{-4}}\frac{1}{63.3}\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} \approx 6.17\cdot10^{-2}\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$$

$$\Delta\gamma = \gamma\left(\frac{\Delta V}{V} + \frac{\Delta N}{N}\right) = 6.17\cdot10^{-2}\left(\frac{0.04}{1} + \frac{2}{63.3}\right)\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$$

$$\approx 0.44\cdot10^{-2}\frac{N}{m} \approx 0.5\cdot10^{-2}\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$$

$$\gamma = (6.2\pm0.5)\cdot10^{-2}\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$$

За етил-алкохол:

$$\gamma = \frac{900\cdot9.81\cdot10^{-6}}{2\pi4\cdot10^{-4}}\frac{1}{150.3}\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} \approx 2.337\cdot10^{-2}\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$$

$$\Delta\gamma = 2.337\cdot10^{-2}\left(\frac{0.04}{1} + \frac{2}{150.3}\right)\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} \approx 0.125\cdot10^{-2}\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} \approx 0.13\cdot10^{-2}\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$$

$$\gamma = (2.34\pm0.13)\cdot10^{-2}\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$$

Калибрациона крива је нацртана коришћењем средњег броја капи (N_S) за течности познатих концентрација. Процењена минимална грешка бројања капи је 2.

Табела 2

c [%]	0	5	15	25	50	75	100	теч. 1	теч. 2
N	65	82	99	112	132	140	152	91	136
	63	81	101	110	132	140	149	92	137
	62	83	100	114	132	142	150	94	136
N_S	63.3 63	82 82	100 100	112 112	132 132	140.7 141	150.3 150	92.3 92	136.3 136
ΔN	1.7 2	1 2	1 2	2 2	0 2	1.3 2	1.3 2	1.7 2	0.7 2

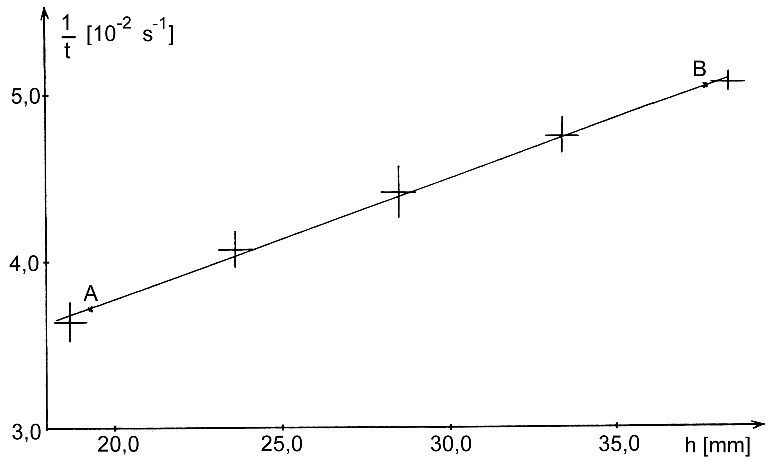
Са калибрационе криве су одређене непознате концентрације које износе:

течност 1: (10 ± 1) %
течност 2: (60 ± 5) %

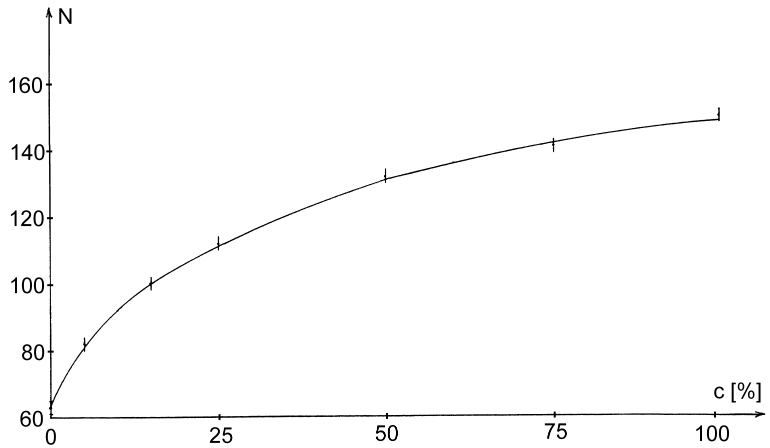
Задатак 3. Зависност коефицијената вискозности и површинског напона течности од температуре

Мерена је брзина истицања 1 ml воде собне температуре и воде петнаестак степени више температуре од собне при истој висини воденог стуба. Примећена је знатно већа брзина истицања топлије воде. Према томе, може се очекивати да је мерним комплетом, допуњеним према предвиђању задатка, могуће пратити зависност коефицијента вискозности од температуре.

Бројане су капи којима истиче 1 ml воде собне температуре и воде петнаестак степени више температуре од собне. У границама грешке мерења није примећена разлика у броју ових капи. Према томе, мерним комплетом, допуњеним према предвиђању задатка, није могуће пратити зависност коефицијента површинског напона од температуре у интервалу температура око собне.



Зависност реципрочне вредности времена од висине



Зависност броја капи од концентрације