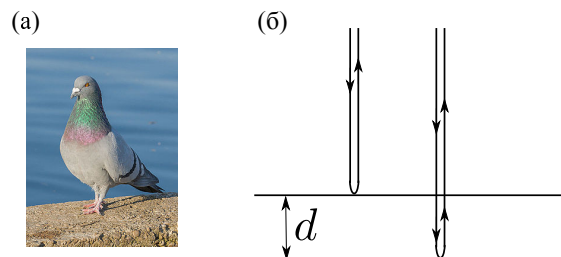




Задатак 1: Боје голубова и лептирова (10 поена)

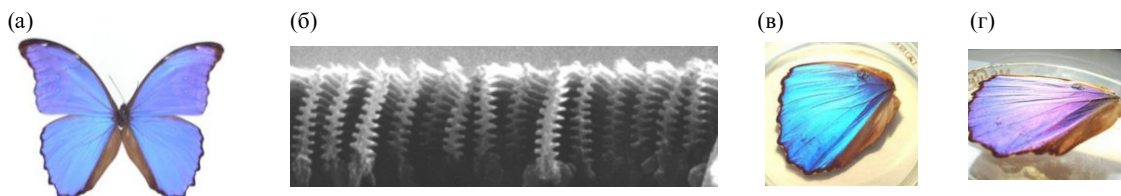
Боје многих лептирова и птица су последица ефеката интерференције и дифракције светлости на структурама које се налазе на њиховој површини. Као последица тих ефеката, рефлектована светлост неке таласне дужине је знатно интензивнија, па посматрач види боју која одговара тој таласној дужини. У овом задатку можете сматрати да је опсег таласних дужина видљиве светлости од 400 до 700 nm, при чему љубичастој боји одговара опсег од 400 до 450 nm, плавој од 450 до 510 nm, зеленој од 510 до 560 nm, жутој од 560 до 620 nm и црвеној од 620 до 700 nm.

- (а) (2 поена) Вероватно сте некад приметили да врат голуба садржи области зелене и љубичасте боје, а ако нисте то можете видети на слици 1(а). У тој области голуб на површини тела има веома танке љуспице које се могу моделовати планпаралелном плочом дебљине $d = 650$ nm и индекса преламања $n = 1,50$ приказаном на слици 1(б). Размотрити равански монохроматски електромагнетски талас који је усмерен нормално на површину љуспице. За које вредности таласне дужине ће доћи до конструктивне интерференције зрака рефлектованог од горње површине љуспице и зрака рефлектованог од доње површине љуспице приказаних на слици 1(б)? Користећи добијени резултат прокоментарисати зашто видимо зелену и љубичасту боју на врату голуба.



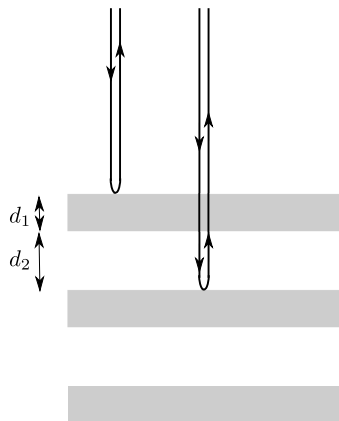
Слика 1: (а) Голуб; (б) шематски приказ зрака рефлектованог од горње површине љуспице и зрака рефлектованог од доње површине љуспице.

Један од најпроучаванијих лептирова је морфо лептир, приказан на слици 2(а). Љуспице на крилима овог лептира садрже сложене структуре приказане на слици 2(б) које подсећају на полице са књигама у библиотеци. Последица такве структуре љуспица је да кад се крила посматрају нормално на површину види се плава боја [слика 2(в)], а кад се посматрају под углом од око 45° , види се љубичаста боја [слика 2(г)].

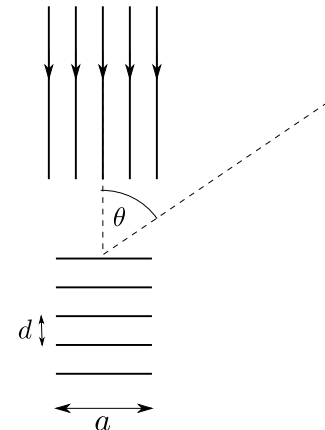


Слика 2: (а) Морфо лептир; (б) структура љуспица морфо лептира; (в) изглед крила посматраних нормално на њихову површину; (г) изглед крила посматраних под углом од око 45° .

- (б) (2 поена) У овом делу задатка ћемо апроксимирати сложену структуру љуспице лептира периодичним низом слојева материјала индекса преламања $n_1 = 1,53$ и ваздуха, приказаним на слици 3. Дебљина слоја материјала је $d_1 = 65,0$ nm, а дебљина слоја ваздуха је $d_2 = 130$ nm. Размотрити равански монохроматски електромагнетски талас који је усмерен нормално на површину љуспице. За које вредности таласне дужине ће доћи до конструктивне интерференције таласа рефлектованог од горње површине првог слоја материјала и горње површине другог слоја материјала, приказаних на слици 3? Користећи добијени резултат прокоментарисати зашто видимо да је лептир плаве боје кад се посматра нормално на површину љуспице.



Слика 3: Модел љуспице по коме се она састоји од периодичног низа слојева материјала индекса преламања n_1 и ваздуха.



Слика 4: Сложенији модел љуспице.

- (в) **(4,5 поена)** Иако модел разматран у делу под (б) може да објасни зашто је лептир плаве боје кад се посматра нормално на површину крила, такав модел не може у потпуности да објасни ефекте промене боје са променом угла посматрања. Надаље ћемо размотрити сложенији модел љуспице лептира приказан на слици 4, по коме се љуспица састоји од низа танких паралелних плочица ширине a . Растојање између суседних плочица је d . Број плочица је M . Према љуспици је усмерен равански монохроматски електромагнетски талас таласне дужине λ_0 нормално на њену површину, видети слику 4. Дужина плочице у правцу нормалном на раван слике 4 је знатно већа од a , d и λ_0 . Сматрати да се интензитет светлости при проласку кроз једну плочицу мења занемарљиво, тј. да је коефицијент трансмисије кроз плочицу близак јединици и много већи од коефицијената рефлексије и апсорпције. Удаљени посматрач чији је положај такав да је угао између правца упадног и рефлектованог таласа θ мери интензитет таласа $I(\theta) = c_0 f(\theta)$, где је c_0 константа, а $f(\theta)$ је функција која у себи садржи и константе a , d , λ_0 и M , чије типичне вредности су дате у делу задатка (г). Одредити функцију $f(\theta)$.
- (г) **(1,5 поена)** Параметри структуре су $a = 300 \text{ nm}$, $d = 235 \text{ nm}$, $M = 9$. Скицирати графике зависности $f(\theta)$ за $\lambda_0 = 480 \text{ nm}$ и $\lambda_0 = 410 \text{ nm}$ (у потпуности ће бити признато решење у коме се ова функција израчуна за неколико репрезентативних вредности θ и на основу тога скицира график). Користећи те графике прокоментарисати зашто се види плава боја кад се крило лептира посматра нормално на површину, а зашто љубичаста кад се посматра под углом од око 45° .

Математички подсетник

Приликом решавања задатка могу вам бити корисне неке од следећих формула:

$$\sum_{i=0}^N \cos(\alpha + i\beta) = \frac{\sin \frac{(N+1)\beta}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}} \cos\left(\alpha + \frac{N\beta}{2}\right),$$

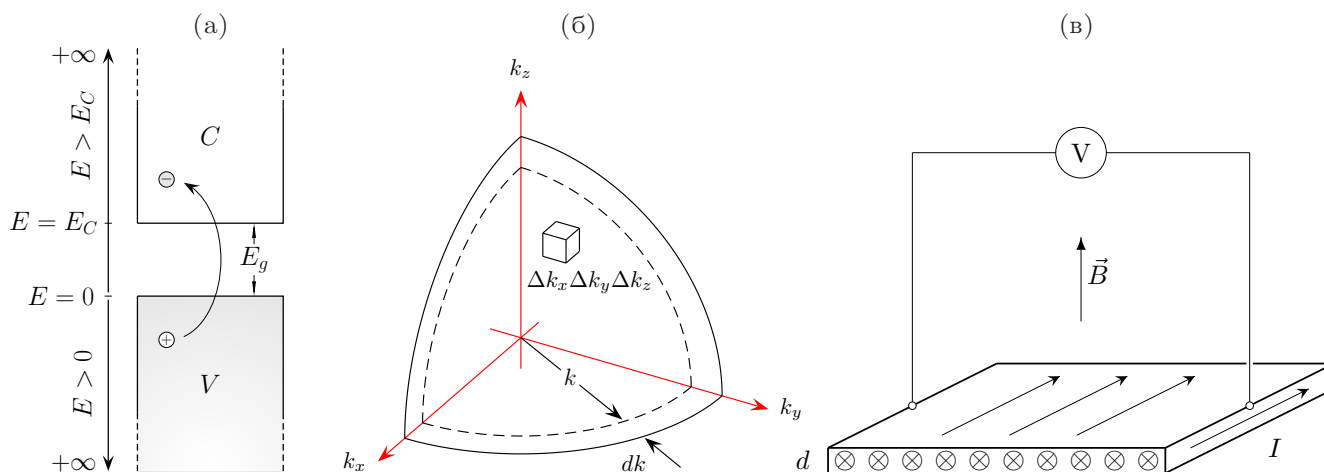
$$\sum_{i=0}^N \sin(\alpha + i\beta) = \frac{\sin \frac{(N+1)\beta}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}} \sin\left(\alpha + \frac{N\beta}{2}\right).$$



Задатак 2: Холов коефицијент полупроводника (10 поена)

У овом задатку помоћи ћемо малој Ради да теоријски предвиди резултате мерења Холовог коефицијента чистог силицијумског полупроводника на собној температури. Прво ћемо се подсетити основа физике полупроводника и описати расподелу електрона и шупљина у овим материјалима. Потом ћемо увести концепт густине стања и применити га на силицијумски полупроводник. Тек онда смо спремни да размотримо плочицу силицијума у магнетном пољу, као реалистичан и мерљив пример Холовог ефекта – наше главне теме.

Полупроводник је материјал код којег су валентна и проводна зона одвојене енергијским процепом $E_g = E_C - E_V$, где је E_C најнижа енергија проводне зоне, а E_V највиша енергија валентне зоне. Једноставности ради узмимо да је $E_V = 0$. На температури апсолутне нуле сви електрони се налазе у валентној зони и материјал је изолатор. Приликом повећавања температуре долази до преласка неких електрона из валентне у проводну зону и материјал постаје проводник. Прелазак електрона из стања валентне зоне са енергијом $E_n < 0$ у проводну зону оставља шупљину у валентној зони која се третира као честица наелектрисања ($+e > 0$) супротног од електрона ($-e < 0$) са енергијом $E_p = -E_n > 0$. Енергије шупљина (које постоје само у валентној зони) су ненегативне са смером пораста енергија од $E = E_V = 0$ (врх валентне зоне) до $E = +\infty$ (дубоко у валентној зони), док су енергије електрона у проводној зони позитивно растуће од $E = E_C$ (дно проводне зоне) до $E = +\infty$ (врх проводне зоне). Видети слику 5(a). Разматрањем шупљина у потпуности је узет у обзир ефекат свих електрона из валентне зоне, тако да је за опис електричних особина материјала довољно разматрати електроне из проводне и шупљине из валентне зоне. У овој слици се шупљине енергија $E \geq 0$ могу у целости разматрати као слободне честице, док се сви електрони налазе у константном ефективном потенцијалу кристалне решетке енергије E_C , па су њихове енергије $E \geq E_C$. Електроне и шупљине у полупроводнику можемо моделовати неинтерагујућим фермионским честицама спина $1/2$ и масе m_n за електроне, тј. m_p за шупљине, у тродимензионалној потенцијалној јами облика квадра велике запремине V , таквој да је потенцијална енергија унутар јаме једнака 0 за шупљине и E_C за електроне, а бесконачна је ван ње. Честице ће се у овој јами распоређивати по нивоима енергија E . Сваки ниво представља орбитално стање које описујемо јединственом уређеном тројком таласних бројева (k_x, k_y, k_z) , чију укупну квантовану енергију налазимо као збир енергија квантованих дуж сваког правца понаособ, а дозвољене вредности таласног броја за дати правец налазимо независно од два преостала правца. Под квантованом енергијом подразумевамо разлику енергије неког стања честице и константне потенцијалне енергије унутар јаме.



Слика 5: (а) Валентна зона (V) и проводна зона (C) у полупроводнику у којем је шупљина (+) настала ексцитацијом електрона (-). (б) Једно орбитално стање запремине $\Delta k_x \Delta k_y \Delta k_z$ унутар осмине сферне љуске дебљине dk и радијуса k . (в) Део Si плочице дебљине d у магнетном пољу \vec{B} кроз коју тече струја јачине I , са идеалним волтметром V који мери трансверзални напон.

Желимо да одредимо густину стања $D(E)$ ових честица у зависности од њихове енергије E . $D(E)$ је дефинисано као $D(E) \equiv \frac{1}{V} \frac{dN}{dE}$, где dN представља број свих (орбиталних и спинских) стања честице у уском интервалу енергија



$(E, E + dE)$, а V је запремина јаме. Густину стања оваквог система честица можемо одредити пребројавањем орбиталних стања у првом октанту k -простора, фокусирајући се на стања са $k_x > 0, k_y > 0, k_z > 0$. Видети слику 5(б) на којој у првом октанту посматрамо $1/8$ танке сферне љуске полупречника k и дебљине dk , при чему је $k \leq \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} \leq k + dk$. Орбитална стања одређена са (k_x, k_y, k_z) нису строго тачкаста, већ заузимају малу, али коначну запремину у k -простору која износи $\Delta k_x \Delta k_y \Delta k_z$, где је $\Delta k_i, i \in \{x, y, z\}$ најмањи корак добијен квантовањем таласног броја k_i дуж i -осе. Дебљина љуске dk је мала, али довољно велика да се у тој љусци нађе велики број тројки таласних бројева (k_x, k_y, k_z) .

- (i) **(2 поена)** Одредити како густине стања за електроне $D_n(E)$ и шупљине $D_p(E)$ зависе од њихових енергија пребројавањем стања унутар поменуте осмине сферне љуске. У добијеним изразима могу да фигуришу и величине m_n, m_p, E_g , и универзалне физичке константе.

Сад када имамо изразе за густине стања електрона и шупљина, можемо одредити њихове концентрације, n за електроне и p за шупљине. Расподела фермиона по енергијама на температури T је Ферми-Диракова (ФД) и дата је изразом $f(E, T) = \frac{1}{\exp(\frac{E-E_F}{k_B T}) + 1}$, где је k_B Болцманова константа, E_F енергија Фермијевог нивоа. Како $D(E)dE$ представља број стања по јединици запремине на енергијама $(E, E + dE)$, а $f(E, T)$ даје вероватноћу да су стања са том енергијом на температури T попуњена, следи да $D(E)f(E, T)dE$ представља концентрацију фермиона са енергијама између $(E, E + dE)$.

- (ii) **(1 поен)** Расподела електрона по енергијским нивоима је $f_n(E, T) = f(E, T)$. Расподелу шупљина по енергијским нивоима на температури T , $f_p(E, T)$ налазимо тако што присуство једне шупљине енергије $E > 0$ посматрамо као одсуство једног електрона енергије $-E < 0$. Одредити зависност $f_p(E, T)$. У добијеном изразу може да фигурише и величина E_F и универзалне физичке константе.

- (iii) **(2 поена)** У функцији од T, m_n, m_p , и E_g одредити концентрације електрона n и шупљина p чистог силицијума, користећи изразе за густине стања из дела (i), као и добијене изразе за расподелу по енергијама. На собној температури ($k_B T$ врло мало наспрам карактеристичних енергија) се може користити апроксимација $\frac{1}{\exp(\frac{E \pm E_F}{k_B T}) + 1} \approx \exp(-\frac{E \pm E_F}{k_B T})$. Ако је потребно, користити да је одређени интеграл $\int_0^{+\infty} \sqrt{x} e^{-x} dx = \sqrt{\pi}/2$. У добијеном изразу могу да фигуришу и универзалне физичке константе.

- (iv) **(1 поен)** Маса електрона и шупљина, m_n и m_p , су у литератури познате под именом *ефективне масе*. Оне су код чистог силицијума на собној температури ($T = 300$ К) приближно једнаке, тј. $m_n \approx m_p \approx m_e$, где је m_e маса слободног електрона. Користећи ову чињеницу одредити енергију Фермијевог нивоа E_F у функцији од E_g .

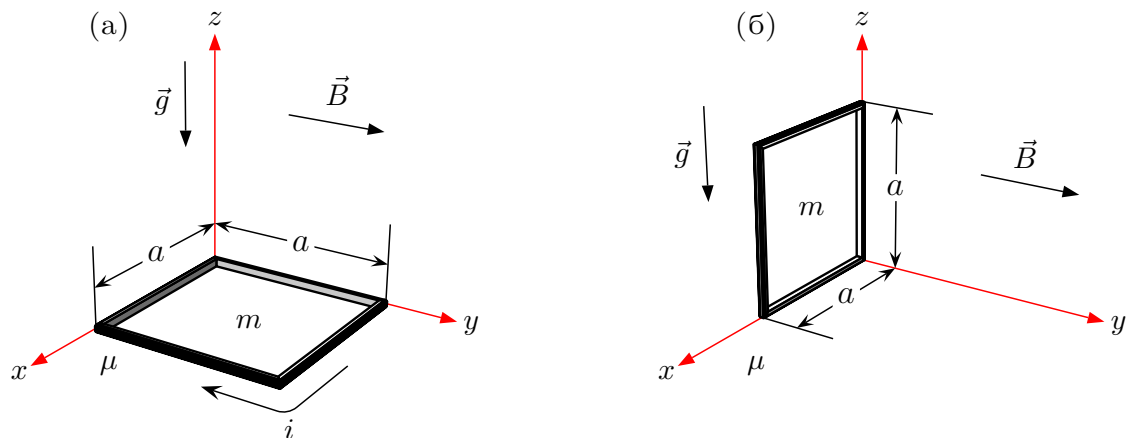
Сада смо извели све потребне састојке да проучимо Холов ефекат. Дефинишимо шта то тачно Рада жели да израчуна. На слици 5(в) је приказан део полупроводничке плочице силицијума дебљине d кроз коју протиче једносмерна струја сталне јачине I у приказаном смеру. Плочица се налази у стационарном хомогеном магнетном пољу индукције B које делује нормално на плочицу у смеру датом на слици. Идеалан волтметар V на слици мери трансверзални напон U . Магнетно поље делује на слободне електроне и шупљине тако што доводи до нагомилавања наелектрисања на једној страни плочице и наелектрисања супротног знака на другој. Ово доводи до стварања трансверзалног напона U чије електростатичко поље се супроставља даљем нагомилавању. У стационарном режиму, утицаји индукованог електричног поља и магнетног поља на носиоце наелектрисања се изједначавају. У даљем тексту претпостављамо да се ради о стационарном режиму. Холов коефицијент се дефинише као $R_H \equiv \frac{Ud}{BI}$.

- (v) **(3 поена)** Извести израз за Холов коефицијент R_H полупроводничке плочице са слике 5(в) у функцији од n, p, μ_n, μ_p , и универзалних физичких константи, где су редом μ_n и μ_p покретљивости електрона и шупљина у материјалу. Покретљивост ($\mu \geq 0$) носиоца наелектрисања q даје везу између његове успостављене брзине \vec{v} у смеру укупне спољашње електромагнетне силе \vec{F}_{em} која делује на наелектрисање, тј. $|q| \vec{v} = \mu \vec{F}_{em}$. Занемарити квантне ефекте електричног и магнетног поља на електроне и шупљине.

- (vi) **(1 поен)** Израчунати вредност Холовог коефицијента на собној температури $T = 300$ К користећи податке за чист силицијум: $E_g = 1,124$ eV, $\mu_n = 1350 \frac{\text{cm}^2}{\text{Vs}}$, $\mu_p = 450 \frac{\text{cm}^2}{\text{Vs}}$, $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31}$ kg, $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}$, $e = 1,602 \cdot 10^{-19}$ C, $\hbar \equiv h/2\pi = 1,054 \cdot 10^{-34}$ J·s, где је \hbar редукована Планкова константа h .



Задатак 3: (Супер)проводни рам у магнетном пољу (10 поена)



Слика 6: (а) Проводни квадратни рам у магнетном пољу положен на хоризонталној подлози. (б) Суперпроводни рам у магнетном пољу постављен усправно на хоризонталној подлози.

- (а) Проводни квадратни рам димензија $a \times a$ и масе m направљен је од хомогене ваљкасте жице занемарљиве дебљине. Рам се држи водоравно на хоризонталној подлози (xy -раван) у гравитационом пољу убрзања $\vec{g} = -g\vec{e}_z$, $g > 0$. Кроз рам тече стална електрична струја јачине $i > 0$ у смеру датом на слици 6(а), која се одржава минијатурним струјним генератором у раму. У простору делује хомогено стационарно магнетно поље индукције $\vec{B} = B\vec{e}_y$, $B > 0$. Анализирајмо обртање рама око x -осе по отпуштању, при чему страница рама која се подудара са x -осом све време не проклизавајући остаје на подлози. Коefицијент самоиндукције рама је занемарљив, као и отпор ваздуха.
- (i) **(0,5 поена)** Одредити момент инерције рама I у односу на x -осу као осу ротације која пролази кроз његову страницу у функцији од m и a .
- (ii) **(0,5 поена)** Нека је ϵ бездимензиони параметар дефинисан као $\epsilon \equiv Bai/(mg) > 0$. За које вредности параметра ϵ рам остаје непомичан на хоризонталној подлози по отпуштању?
- (iii) **(2,5 поена)** Размотримо сада ситуацију у којој је ϵ такво да долази до ротације рама око x -осе, чија страница остаје у контакту са подлогом током обртања. Коefицијент трења клизања између подлоге и рама је такав да се проклизавање рама може занемарити. Нека је θ тренутни угао који раван рама заклапа са xy -равни током ротације, при чему се у анализи кретања у најширем опсегу углова ограничавамо на $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$. Одредити при ком углу θ ће доћи до потпуног одвајања рама од подлоге током ротације у зависности од вредности параметра ϵ . Кретање рама од тренутка потпуног одвајања не разматрати.
- (iv) **(1,5 поена)** Нека је у овом случају коefицијент трења клизања између рама и подлоге познат и износи μ . Одредити при ком углу θ ће ипак доћи до проклизавања рама по подлози у функцији од μ и параметра ϵ који доводи до ротације рама око своје странице која пролази кроз x -осу. Кретање рама од тренутка проклизавања не разматрати.
- (б) У овом делу задатка размотрићемо суперпроводни квадратни рам без струјног генератора идентичне масе, геометрије и димензија као у делу задатка под (а). Материјал од којег је рам направљен је суперпроводан, што значи да је електрични отпор рама егзактно једнак нули, тј. $R = 0 \Omega$. Рам, у којем нема почетне јачине струје, се држи усправно (xz -раван) додирујући својом доњом страницом хоризонталну подлогу (xy -раван) и налази се у пољу Земљине теже и у идентичном магнетном пољу као у случају под (а), видети слику 6(б). Коefицијент самоиндукције рама је коначан. Ако би се рам принудно окренуо за 90° и положио на хоризонталну подлогу у њему би се индуковала електрична струја јачине i_s .



- (i) **(0,5 поена)** Одредити коефицијент самоиндукције L овог суперпроводног рама у функцији од датих вредности i_s , a , и B .

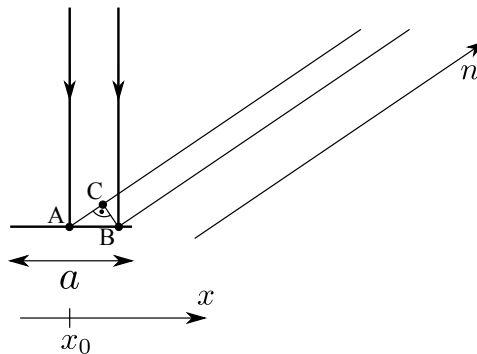
Анализирајмо сада ротационо кретање оваквог рама око x -осе по ослобађању из усправног положаја без почетне јачине струје у њему, при чему страница рама која се поклапа са x -осом све време не проклизавајући остаје на подлози огромног коефицијента трења клизања, тј. $\mu \rightarrow \infty$. По ослобађању из усправног положаја рам спонтано започне своју ротацију у првом октанту око x -осе према xy -равни. Отпор ваздуха је занемарљив.

- (ii) **(2 поена)** Нека је ϵ бездимензиони параметар дефинисан као $\epsilon \equiv Bai_s/(mg) > 0$ и нека је $\vartheta \geq 0^\circ$ тренутни угао који равна рама заклапа са xz -равни током ротације. Одредити силу нормалне реакције подлоге N у функцији од ϑ и ϵ . Такође, показати да се страница рама око које он ротира неће одвојити од подлоге ни за једну вредност параметра ϵ .
- (iii) **(1,5 поена)** Одредити силу трења F_{tr} између рама и подлоге у функцији од ϑ и ϵ . Нека је $\vartheta^{(c)}$ угао при којем ће сила трења променити свој смер. У зависности од параметра ϵ наћи $\vartheta^{(c)}$.
- (iv) **(1 поен)** У зависности од параметра ϵ одредити: угао $\vartheta^{(fin)}$ за који се рам максимално отклони у односу на вертикалну равна, затим максималну угаону брзину $\omega^{(max)}$ коју рам достиже током своје ротације, као и угао ϑ_0 при којем се тај максимум остварује. Уколико рам удари о подлогу, на њој се зауставља без одбијања.



Решење задатка 1

- (а) При рефлексији зрака од горње површине љуспице његова фаза се промени за $\phi_1 = \pi$. При двоструком пролазу зрака кроз љуспицу и рефлексији од доње површине љуспице његова фаза се промени за $\phi_2 = \frac{2\pi}{\lambda} 2nd$, где је λ таласна дужина разматраног таласа у ваздуху. До конструктивне интерференције два зрака долази када је $\phi_2 - \phi_1 = 2m\pi$, где је m ненегативан цео број. Одатле следи $\lambda = \frac{4nd}{2m+1}$. За $m = 3$ и $m = 4$ таласне дужине која задовољавају овај услов су из видљивог дела спектра и износе редом 557 nm и 433 nm. Таласна дужина од 557 nm одговара зеленој боји, а таласна дужина од 433 nm одговара љубичастој боји, па зато видимо зелене и љубичасте области на врату голууба.
- (б) При рефлексији зрака од горње површине првог слоја материјала његова фаза се промени за $\phi_1 = \pi$. При двоструком пролазу зрака кроз први слој материјала и први слој ваздуха и рефлексији од другог слоја материјала његова фаза се промени за $\phi_2 = \frac{2\pi}{\lambda} 2(n_1 d_1 + d_2) + \pi$. До конструктивне интерференције два зрака долази када је $\phi_2 - \phi_1 = 2m\pi$, где је m природан број. Одатле следи $\lambda = \frac{2(n_1 d_1 + d_2)}{m}$. Ова таласна дужина је у видљивом делу спектра једино кад је $m = 1$ и једнака је $\lambda = 459$ nm. Због тога се види да је лептир плаве боје кад је правац посматрања нормалан на површину љуспице.



Слика 1: Рефлексија светлости на једној плочици.

- (в) Размотримо прво рефлексију на горњој плочици сложене структуре. Нека је координатни систем постављен као на слици 1 и нека је n оса која се поклапа са правцем рефлектованог таласа који долази до посматрача. Допринос одговарајућој компоненти електричног поља од рефлексије на делу плочице са координатама из интервала $(x, x + dx)$ је $dE = C \cdot dx \cdot \cos[\omega t - kn + \phi(x)]$, где је C константа која зависи од интензитета упадног таласа и коефицијента рефлексије на плочици, ω је кружна фреквенција таласа, t је време, $k = \frac{2\pi}{\lambda_0}$ је таласни вектор и $\phi(x)$ је фаза таласа. С обзиром да фаза таласа рефлектованог у x_0 , где је x_0 средиште плочице, касни за фазом таласа рефлектованог у x за $\frac{2\pi}{\lambda_0} \overline{AC}$ (видети слику 1), важи $\phi(x) = \phi(x_0) + \frac{2\pi}{\lambda_0} (x - x_0) \sin \theta$, где је x_0 координата средишта плочице. Укупна вредност компоненте електричног поља рефлектованог таласа је онда $E(n, t) = \int_{x_0 - \frac{a}{2}}^{x_0 + \frac{a}{2}} C \cdot dx \cdot \cos[\omega t - kn + \phi(x)]$. Решавањем интеграла се добија

$$E(n, t) = Ca \frac{\sin\left(\frac{\pi a}{\lambda_0} \sin \theta\right)}{\frac{\pi a}{\lambda_0} \sin \theta} \cos[\omega t - kn + \phi(x_0)].$$

Укупна вредност електричног поља рефлектованог таласа на месту где се налази удаљени посматрач се добија сабирањем доприноса таласа рефлектованих од сваке од плочица. Фазна разлика таласа рефлектованих од две суседне плочице је $\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda_0} (\overline{AC} + \overline{AB})$ (видети слику 2), односно $\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda_0} (d + d \cos \theta)$. Укупна вредност компоненте електричног поља је онда

$$E_t(n, t) = Ca \frac{\sin\left(\frac{\pi a}{\lambda_0} \sin \theta\right)}{\frac{\pi a}{\lambda_0} \sin \theta} \sum_{i=0}^{M-1} \cos[\omega t - kn + \phi(x_0) - i\Delta\phi].$$

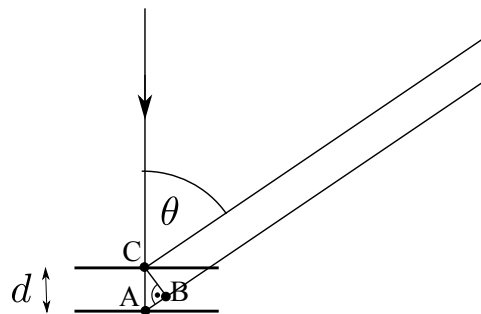


Коришћењем идентитета датог у тексту задатка се добија

$$E_t(n,t) = Ca \frac{\sin\left(\frac{\pi a}{\lambda_0} \sin\theta\right)}{\frac{\pi a}{\lambda_0} \sin\theta} \frac{\sin\left[\frac{M\pi d}{\lambda_0}(1+\cos\theta)\right]}{\sin\left[\frac{\pi d}{\lambda_0}(1+\cos\theta)\right]} \cos\left[\omega t - kn + \phi(x_0) - \frac{M-1}{2}\Delta\phi\right].$$

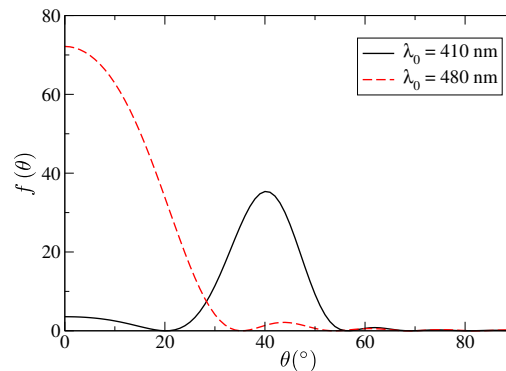
Израз испред косинусне функције представља амплитуду укупног рефлектованог таласа. Пошто је интензитет таласа сразмеран квадрату амплитуде, следи да је угаона зависност интензитета светлости коју региструје посматрач

$$I(\theta) \propto f(\theta) = \frac{\sin^2\left(\frac{\pi a}{\lambda_0} \sin\theta\right)}{\left(\frac{\pi a}{\lambda_0} \sin\theta\right)^2} \frac{\sin^2\left[\frac{M\pi d}{\lambda_0}(1+\cos\theta)\right]}{\sin^2\left[\frac{\pi d}{\lambda_0}(1+\cos\theta)\right]}.$$



Слика 2: Рефлексија светлости од две суседне плочице.

- (г) На слици 3 је приказана зависност $I(\theta) \propto f(\theta)$ за $\lambda_0 = 410 \text{ nm}$ и $\lambda_0 = 480 \text{ nm}$. Из добијених графика се види да је за $\lambda_0 = 480 \text{ nm}$ максимум рефлектоване светлости под углом $\theta = 0^\circ$, а за $\lambda_0 = 410 \text{ nm}$ тај максимум је на $\theta = 40^\circ$. Зато гледањем љуспице под углом $\theta = 0^\circ$ видимо плаву боју, а гледањем под углом од око 45° видимо љубичасту боју.



Слика 3: Угаона зависност интензитета рефлектоване светлости $I(\theta) \propto f(\theta)$ за $\lambda_0 = 410 \text{ nm}$ и $\lambda_0 = 480 \text{ nm}$.



Решење задатка 2

Знамо да је таласна функција честице у једнодимензионалној потенцијалној јами $\psi_{k_x}(x) = \sqrt{\frac{2}{L_x}} \sin(k_x x)$, где је $k_x = \frac{n_x \pi}{L_x}$ чије дозвољене вредности добијамо из граничних услова. Са L_x смо обележили дужину потенцијалне јаме дуж x правца, док n_x пребројава орбитална стања и генерално узима целобројне вредности, али ћемо се по услову задатка фокусирати на позитивне, тј. $n_x = 1, 2, 3 \dots$. Енергија једног оваквог стања дуж x правца је дата изразом $E_x = \frac{\hbar^2 k_x^2}{2m}$, која је заправо кинетичка енергија у једној димензији честице масе m . Аналогно за y и z правца добијамо одговарајуће квантоване енергије и таласне бројеве. Другим речима, k_i узима вредност $k_i = \frac{n_i \pi}{L_i}$, где је $i \in \{x, y, z\}$, L_i је дужина јаме у правцу i , а $n_i = 1, 2, 3 \dots$. Енергија једног орбиталног стања је збир енергија појединачних у сва три координатна правца и дата је изразом $E = \frac{\hbar^2}{2m}(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)$.

(i) Из услова квантизације следи да за сваку дозвољену вредност k_i можемо учртати по једну тачку у k -простору.

Уцртавањем свих тачака формирамо правоугаону тродимензионалну решетку са корацима $\Delta k_i = \frac{\pi}{L_i}$. Одавде видимо да ће запремина коју окупира једно орбитално стање у k -простору бити $\Delta k_x \Delta k_y \Delta k_z = \frac{\pi^3}{L_x L_y L_z} = \frac{\pi^3}{V}$,

где је V запремина јаме. Из израза за енергију једног орбиталног стања видимо да се оно налази на сфери радијуса $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$. Посматраћемо само први октант, јер смо се ограничили на позитивне вредности n_i . Запремину танког слоја осмине сфере добијамо као $4\pi k^2 dk/8$. Укупан број орбиталних стања у овом танком слоју је једнак односу запремине слоја и запремине коју заузима једно орбитално стање. Међутим, овај број се мора помножити са 2, јер фермиони имају две могуће вредности пројекције спина, $\pm 1/2$. Тако долазимо да броја орбиталних и спинских стања у осмини танке сферне љуске: $dN = 2 \times (4k^2 \pi dk/8)/(\pi^3/V)$. Користећи везу између k и E налазимо да је број свих стања у слоју у функцији енергије једнак $dN = \frac{Vm}{\pi^2 \hbar^2} \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} dE$. Одавде видимо да је густина стања $D(E) = \frac{1}{V} \frac{dN(E)}{dE} = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{E}$. Према томе,

израз за густину стања електрона гласи $D_n(E) = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m_n}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{E - E_g}$, јер под квантованом енергијом подразумевамо разлику енергије E и константне потенцијалне енергије унутар јаме $E_C = E_g$, док је за шупљине $D_p(E) = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m_p}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{E}$.

(ii) Из дефиниције расподеле шупљина из задатка следи да је $f_p(E, T) = 1 - f_n(-E, T) = 1 - \frac{1}{\exp(\frac{-E - E_F}{k_B T}) + 1} = \frac{1}{\exp(\frac{E_F + E}{k_B T}) + 1}$.

(iii) У поставци задатка смо дефинисали концентрацију честица у интервалу енергија $(E, E + dE)$. Да бисмо добили укупну концентрацију потребно је израз интегралити по дозвољеним енергијама. Како енергије електрона расту од E_g до $+\infty$, укупна концентрација електрона ће бити $n = \int_{E_g}^{\infty} D_n(E) f_n(E) dE$. Са друге стране, како смо дефинисали енергију шупљина, укупна концентрација шупљина ће бити $p = \int_0^{\infty} D_p(E) f_p(E) dE$. Из израза изостављамо зависност од температуре, јер се у даљем концентришемо на фиксну, собну температуру. Ако применимо апроксимацију ФД расподеле која је дата у формулацији задатка, за концентрацију електрона имамо интеграл:

$$n = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m_n}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} \int_{E_g}^{\infty} \sqrt{E - E_g} \exp\left(-\frac{E - E_F}{k_B T}\right) dE,$$

а увођењем смене $\xi = \frac{E - E_g}{k_B T}$ добијамо:

$$n = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m_n k_B T}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(\frac{E_F - E_g}{k_B T}\right) \int_0^{\infty} \sqrt{\xi} e^{-\xi} d\xi.$$



Користећи резултат из поставке задатка за одређени интеграл добијамо да је концентрација електрона:

$$n = 2 \left(\frac{m_n k_B T}{2\pi \hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(\frac{E_F - E_g}{k_B T}\right).$$

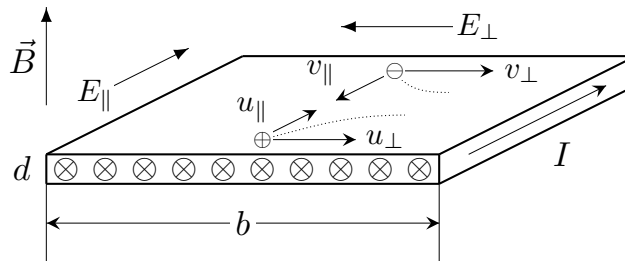
Сличним поступком долазимо до израза за концентрацију шупљина:

$$p = 2 \left(\frac{m_p k_B T}{2\pi \hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{E_F}{k_B T}\right).$$

У случају чистог силицијума све шупљине морају доћи од електрона у проводној зони, што значи $-n + p = 0$.

Одавде следи да је $n = p = 2 \left(\frac{k_B T}{2\pi \hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} (m_n m_p)^{\frac{3}{4}} \exp\left(-\frac{E_g}{2k_B T}\right)$, јер се n добија кореновањем израза np .

- (iv) Изједначавањем израза за густине електрона и шупљина можемо извести израз за енергију Фермијевог нивоа $E_F = \frac{E_g}{2} + \frac{3}{4} k_B T \ln\left(\frac{m_p}{m_n}\right)$. Како су у нашем случају масе идентичне $m_n \approx m_p \approx m_e$, имамо да се Ферми ниво налази тачно на средини између проводне и валентне зоне, односно $E_F = E_g/2$.



Слика 4: Део Si плочице дебљине d и ширине b кроз коју протиче струја сталне јачине I услед поља E_{\parallel} електромоторне силе. Компоненте тренутних брзина дуж правца поља $E_{\parallel/\perp}$ су: $u_{\parallel/\perp}$ за шупљине и $v_{\parallel/\perp}$ за електроне.

- (v) У узорку се налазе електрони и шупљине који се при протоку струје крећу у супротним смеровима дуж правца тока. Магнетно поље скреће наелектрисања и доводи до њиховог нагомиланања на странама плочице. Видети слику 4. Због засад непознате разлике у броју нагомиланих електрона и шупљина, претпоставимо да ће десна страна плочице бити наелектрисана позитивно, а лева негативно. Ово ствара трансверзално електрично поље $E_{\perp} = U/b$ у смеру датом на слици, где је b ширина плочице. Брзину електрона можемо разложити на лонгитудиналну компоненту v_{\parallel} дуж правца струје и компоненту трансверзалну на тај правац v_{\perp} . Аналогно уводимо и за шупљине, где смо лонгитудиналну компоненту означили са u_{\parallel} , а трансверзалну са u_{\perp} . У стационарном режиму, струје електрона и шупљина се морају изједначити дуж трансверзалног правца, што значи $en v_{\perp} = ep u_{\perp}$. Компоненте брзина, u_{\perp} и v_{\perp} , потичу од трансверзалног електричног поља E_{\perp} , као и поља Лоренцових сила: $v_{\parallel} B$ за електроне и $u_{\parallel} B$ за шупљине. Примењујући дефиницију покретљивости наелектрисања дуж трансверзалног и лонгитудиналног правца долазимо до: $v_{\perp} = \mu_n (v_{\parallel} B + E_{\perp}) = \mu_n^2 E_{\parallel} B + \mu_n E_{\perp}$ и $u_{\perp} = \mu_p (u_{\parallel} B - E_{\perp}) = \mu_p^2 E_{\parallel} B - \mu_p E_{\perp}$, где смо лонгитудиналне брзине честица изразили као $u_{\parallel} = \mu_p E_{\parallel}$ и $v_{\parallel} = \mu_n E_{\parallel}$. E_{\parallel} представља лонгитудиналну компоненту електричног поља која доводи до протока сталне струје јачине I , као на слици 4. Јачину струје I можемо написати у виду производа укупне густине струје и површине попречног пресека bd , тј. $I = e(nv_{\parallel} + pu_{\parallel})bd = eE_{\parallel}(n\mu_n + p\mu_p)bd$. Уврштавањем израза за брзине дуж трансверзалног правца у случају електрона и шупљина у услов стационарности добијамо $E_{\parallel} B (p\mu_p^2 - n\mu_n^2) = E_{\perp} (n\mu_n + p\mu_p)$. Из добијеног и израза за јачину струју следи да је трансверзални напон $U = \frac{BI}{d} \frac{p\mu_p^2 - n\mu_n^2}{e(n\mu_n + p\mu_p)^2}$.

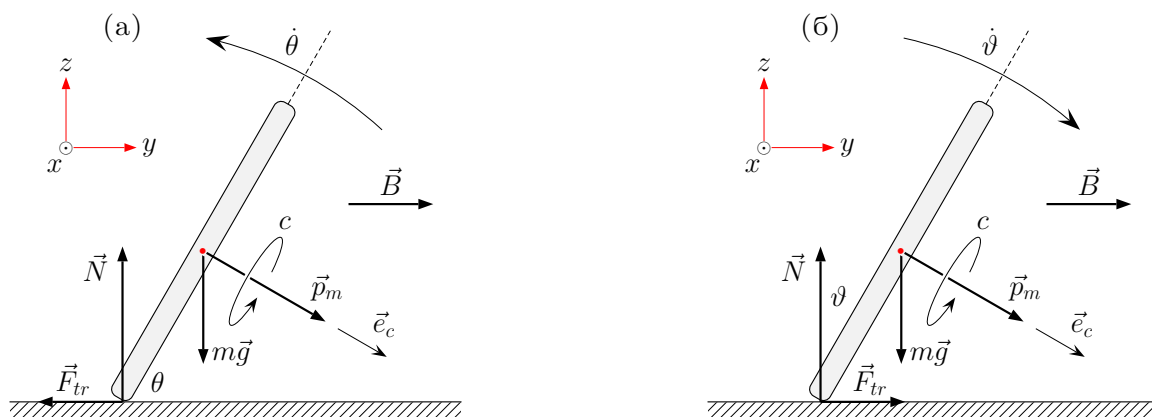
Одавде видимо да је израз за Холов коефицијент $R_H = \frac{p\mu_p^2 - n\mu_n^2}{e(n\mu_n + p\mu_p)^2}$. Да смо претпоставили супротан смер трансверзалног електричног поља E_{\perp} , које потиче од нагомиланих наелектрисања, добили бисмо исти израз са супротним знаком.



- (vi) Користећи дате вредности налазимо да је концентрација електрона и шупљина $n = p \approx 0,902 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-3}$. Уврштавањем концентрације у израз за Холов коефицијент добијамо $R_H \approx -346 \text{ m}^3/\text{C}$. Видимо да ће знак Холовог коефицијента зависити од покретљивости носилаца наелектрисања. У нашем случају када су концентрације исте видимо да знак долази директно од разлике у покретљивостима μ_n и μ_p . Како смо претпоставили да се на десној страници нагомилавају позитивна, а на левој негативна наелектрисања, добили смо негативан знак Холовог коефицијента. Ово значи да је почетна претпоставка требала да буде обрнута. Одређивањем знака R_H је могуће директно одредити доминантни тип носилаца наелектрисања у материјалу.

Решење задатка 3

- (a) (i) Момент инерције рама у односу на x -осу износи $I = ma^2/4 + ma^2/6 = 5ma^2/12$. Први члан у збиру потиче од странице рама масе $m/4$ која се налази на растојању a од осе ротације, док други члан описује два члана једнаких доприноса у моменту инерције, сваки $1/3 \times ma^2/4$. Нема доприноса у моменту инерције од странице рама која пролази кроз осу ротације, јер се дебелина рама занемарује.
- (ii) Магнетни момент рама који лежи на хоризонталној подлози износи $-p_m \vec{e}_z$, где је $p_m = ia^2$. Овај момент заклапа угао од 90° са вектором магнетне индукције \vec{B} генеришући момент Амперових сила $\vec{M} = \vec{p}_m \times \vec{B} = -p_m B \vec{e}_z \times \vec{e}_y = ia^2 B \vec{e}_x$. Заправо, како нема резултанте Амперових сила које делују на рам у хомогеном магнетном пољу, реч је о спрегу магнетних сила који би доводио до ротације у \vec{e}_x смеру по правилу десног завртња. Момент силе Земљине теже у односу на x -осу делује у супротном смеру и износи $-mg(a/2)\vec{e}_x$. Нападна тачка силе реакције подлоге је у критичном тренутку (при тенденцији одвајања) померена према средишту странице рама која се поклапа са x -осом, те је њен момент сила нула. Ротације рама нема уколико важи $mg(a/2) \geq ia^2 B$, тј. за $\epsilon \in (0, 1/2]$.



Слика 5: (а) Тренутни положај проводног рама током ротације око x -осе од y - ка z -оси. (б) Тренутни положај суперпроводног рама током ротације око x -осе од z - ка y -оси.

- (iii) Тренутни магнетни момент рама износи $\vec{p}_m = (\pm i)\vec{S}_c = p_m \vec{e}_c$, где је $p_m = ia^2$ а \vec{e}_c јединични орт контуре по правилу десног завртња. Изабрана контура c се по смеру подударе са смером сталне јачине струје i (иначе не мора), па је $p_m > 0$, јер је $\vec{S}_c = a^2 \vec{e}_c$. Узето је $+i$, а не $-i$, јер се смер јачине струје и оријентација контуре подударе, видети слику 5(а) (поглед дуж x -осе). Спруг Амперових сила у односу на било коју осу паралелну са \vec{e}_x се записује у облику $\vec{M} = \vec{p}_m \times \vec{B} = p_m B \vec{e}_c \times \vec{e}_y = p_m B \cos \theta \vec{e}_x$, где је θ тренутни угао који рам заклапа са xy -равни. Резултанта свих Амперових сила које делују на рам је једнака нули, јер се рам налази у хомогеном магнетном пољу. Као што је приказано на слици 5(а), рам тренутне угаоне брзине $\dot{\theta}$ ротира у смеру од y - ка z -оси. Све скупа, на њега делује сила Земљине теже mg у средишту, сила нормалне реакције подлоге N , и сила трења мировања F_{tr} (нема проклизавања). Избор смера силе трења мировања је произвољан, јер F_{tr} мировања може да промени знак што је диктирано динамиком система која се покорава Њутновим законима. Овакав резон не важи у случају проклизавања када је смер силе трења увек супротан од тренутне брзине контактне тачке рама у односу на подлогу.

Применом II Њутновог закона за ротационо кретање рама момента инерције I тренутног угаоног убрзања $\ddot{\theta}$ добијамо

$$I\ddot{\theta} = p_m B \cos \theta - mga \cos \theta / 2. \quad (1)$$

Центар масе рама има тренутно тангенцијално убрзање $a\ddot{\theta}/2$, па се према II Њутновом закону за тренутно транслационо кретање центра масе рама долази до

$$ma\ddot{\theta}/2 = N \cos \theta + F_{tr} \sin \theta - mg \cos \theta. \quad (2)$$



Центар масе рама има и нормално убрзање $a\dot{\theta}^2/2$, јер се креће по кружници радијуса $a/2$, па се II Њутновим законом добија

$$ma\dot{\theta}^2/2 = mg \sin \theta + F_{tr} \cos \theta - N \sin \theta. \quad (3)$$

Једначина (1) се може записати и у интегралном облику множењем са елементарном променом угла $d\theta$ у смеру ротације. Наиме, $\dot{\theta}d\theta = (d\dot{\theta}/dt)d\theta = d(\dot{\theta}^2/2)$. Са друге стране, $\cos \theta d\theta = d(\sin \theta)$. На тај начин (1) постаје

$$d\left(I\dot{\theta}^2/2 + mga \sin \theta/2 - ia^2 B \sin \theta\right) = 0, \quad (4)$$

што представља Закон одржања енергије

$$I\dot{\theta}^2/2 + mga \sin \theta/2 + W_p = const. \quad (5)$$

Из почетних услова ($t = 0$) имамо да је $\theta = 0$ и $\dot{\theta} = 0$, па је $const = 0$. $W_p = -\vec{p}_m \cdot \vec{B}$ представља потенцијалну енергију магнетног дипола сталне јачине струје у магнетном пољу. Заправо магнетно поље на временском интервалу dt врши елементаран рад $dW_p = i\mathcal{E}_{ind}dt$ индукујући по Фарадејевом закону електромоторну силу $\mathcal{E}_{ind} = -d\Phi_c/dt$ у раму, где је $\Phi_c = \vec{B} \cdot \vec{S}_c$ магнетни флуks у односу на контуру c . На крају, $dW_p = i\mathcal{E}_{ind}dt = -id\Phi_c$, тј. $W_p = -i\Phi_c = -\vec{p}_m \cdot \vec{B}$. Иначе, да је оријентација контуре c имала супротан смер од i , онда би у овом извођењу на сваком месту где стоји i , требало ставити $-i$. Из једначина (1)–(5) следе силе F_{tr} и N у функцији од θ и ϵ

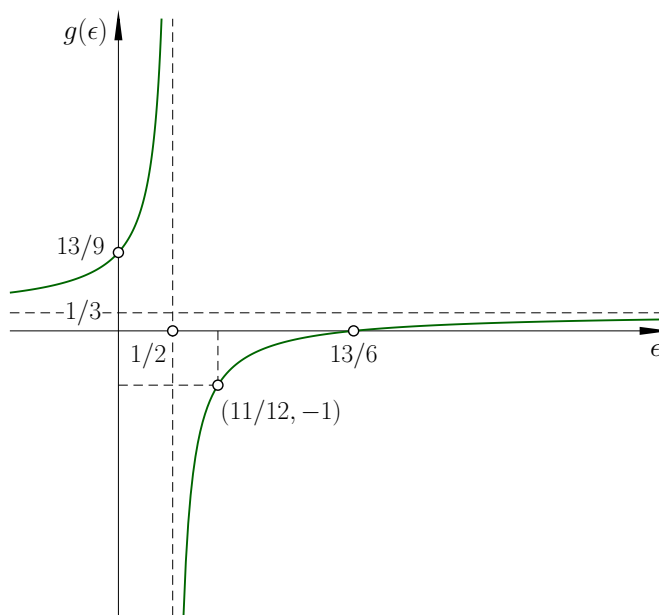
$$F_{tr}(\theta, \epsilon) = \frac{9}{10}(2\epsilon - 1)mg \sin 2\theta \text{ и } N(\theta, \epsilon) = \frac{9}{10}(2\epsilon - 1)mg(\cos 2\theta - g(\epsilon)), \quad (6)$$

где је $g(\epsilon) \equiv \frac{6\epsilon - 13}{9(2\epsilon - 1)}$ (слика 6). Примећујемо да је $F_{tr}(\theta, \epsilon) \geq 0$ на интервалу који нас интересује $\theta \in [0^\circ, 90^\circ]$ и $\epsilon > 1/2$, па је довољно испитати функцију $f(\theta, \epsilon) \equiv F_{tr}(\theta, \epsilon)/N(\theta, \epsilon)$ у области у којој је она позитивна и дефинисана, тј. за $N(\theta, \epsilon) > 0$. На основу (6) имамо да је $f(\theta, \epsilon) = \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta - g(\epsilon)}$. У случају $\epsilon \in (1/2, 11/12) \Rightarrow g(\epsilon) < -1$, па је $N(\theta, \epsilon) > 0, \forall \theta \in [0^\circ, 90^\circ]$. Диференцирањем по θ се налази да функција $f(\theta, \epsilon)$ досеже максимум у $\theta_\epsilon^{(max)} = \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{g(\epsilon)} < 90^\circ, \forall \epsilon \in (1/2, 11/12)$, при чему $g^{-1}(\epsilon)$ опада од $g^{-1}(1/2) = 0$ до $g^{-1}(11/12) = -1$, а $\theta_\epsilon^{(max)}$ расте од $\theta_{1/2}^{(max)} = 45^\circ$ до $\theta_{11/12}^{(max)} = 90^\circ$, док је $f(\theta_\epsilon^{(max)}, \epsilon) = \frac{9(2\epsilon - 1)}{2\sqrt{2(11 - 12\epsilon)(3\epsilon + 1)}}$ и узима коначну вредност на посматраном интервалу параметра ϵ . Као закључак,

рам се неће потпуно одвојити од подлоге ни за једно ϵ из интервала $(1/2, 11/12)$ при угловима који нас интересују: $\theta \in [0^\circ, 90^\circ]$, видети слику 7(а). Међутим, за $\epsilon \in [11/12, \infty)$, постоји могућност да је $N(\theta, \epsilon) = 0$ за неко $\theta \leq 90^\circ$. Овај случај, $\epsilon \in [11/12, \infty)$, доводи до ситуације у којој $f(\theta, \epsilon) \rightarrow \infty$ за неки асимптотски угао $\theta_\epsilon^{(asym)}$. Област $\theta \in (\theta_\epsilon^{(asym)}, 90^\circ)$ нас посебно не интересује ($N(\theta, \epsilon) < 0$ је физички немогуће), већ област у којој је $0^\circ \leq \theta < \theta_\epsilon^{(asym)}$. За асимптотски угао важи да је $\theta_\epsilon^{(asym)} = \frac{1}{2} \arccos g(\epsilon)$. Функција $g(\epsilon)$ расте од $g(11/12) = -1$ до $g(\epsilon \rightarrow \infty) \rightarrow 1/3$, док асимптотски угао опада до свог минимума тако да је: $90^\circ \geq \theta_\epsilon^{(asym)} > (1/2) \arccos \sqrt{1/3} = \arccos \sqrt{2/3} \approx 35,264^\circ$, видети слику 7(б). За $\epsilon \in [11/12, \infty)$ рам се потпуно одваја од подлоге при $\theta = \theta_\epsilon^{(asym)}$, при чему $\theta_\epsilon^{(asym)}$ опада од 90° до око $35,264^\circ$ како ϵ расте од $11/12$ до ∞ . Дакле, ако $\theta_\epsilon^{(asym)}$ генерално именујемо као угао при којем ће се рам потпуно одвојити од подлоге, закључујемо да

$$\theta_\epsilon^{(asym)} = \begin{cases} \text{не постоји} & 1/2 < \epsilon < 11/12, \\ \frac{1}{2} \arccos g(\epsilon) & 11/12 \leq \epsilon < \infty. \end{cases}$$

Интересантно је уочити да ће у другом случају, $11/12 \leq \epsilon < \infty$, долазити до проклизавања у асимптотским ситуацијама када се рам потпуно одваја од подлоге, јер постоји решење једначине $\mu = f(\theta, \epsilon)$ за $\mu \rightarrow \infty$ (екстремно храпава подлога). Међутим, реч је о спекулацијама у бесконачности, те је тешко тврдити да ли прво долази до проклизавања или до потпуног одвајања.



Слика 6: График функције $g(\epsilon) = \frac{6\epsilon - 13}{9(2\epsilon - 1)}$.

(iv) У овом делу решавамо једначину $\mu = f(\theta, \epsilon)$ за случај проклизавања. Осврнимо се прво на интервал $\epsilon \in$

$(1/2, 11/12)$. Онда када је $\mu > f(\theta_{\epsilon}^{(max)}, \epsilon) = \frac{9(2\epsilon - 1)}{2\sqrt{2(11 - 12\epsilon)(3\epsilon + 1)}} \equiv \mu_c$ никада не долази до проклизавања.

У противном, за $\mu \leq \mu_c$, рам проклизава при углу $\theta_{\epsilon}^* \leq \theta_{\epsilon}^{(max)}$, где једнакост важи за $\mu = \mu_c$. На овом ϵ интервалу, угао θ_{ϵ}^* се налази као решење једначине $\sin 2\theta = \mu(\cos 2\theta - g(\epsilon))$, тј. $\cos(2\theta + \varphi) = g(\epsilon) \cos \varphi$,

где је $\cos \varphi \equiv \frac{\mu}{\sqrt{1 + \mu^2}}$. Заправо, $\theta_{\epsilon}^* = \frac{1}{2} \arccos \frac{\mu^2 g(\epsilon) + \sqrt{1 + \mu^2 - \mu^2 g^2(\epsilon)}}{1 + \mu^2}$ које је решење мање вредности,

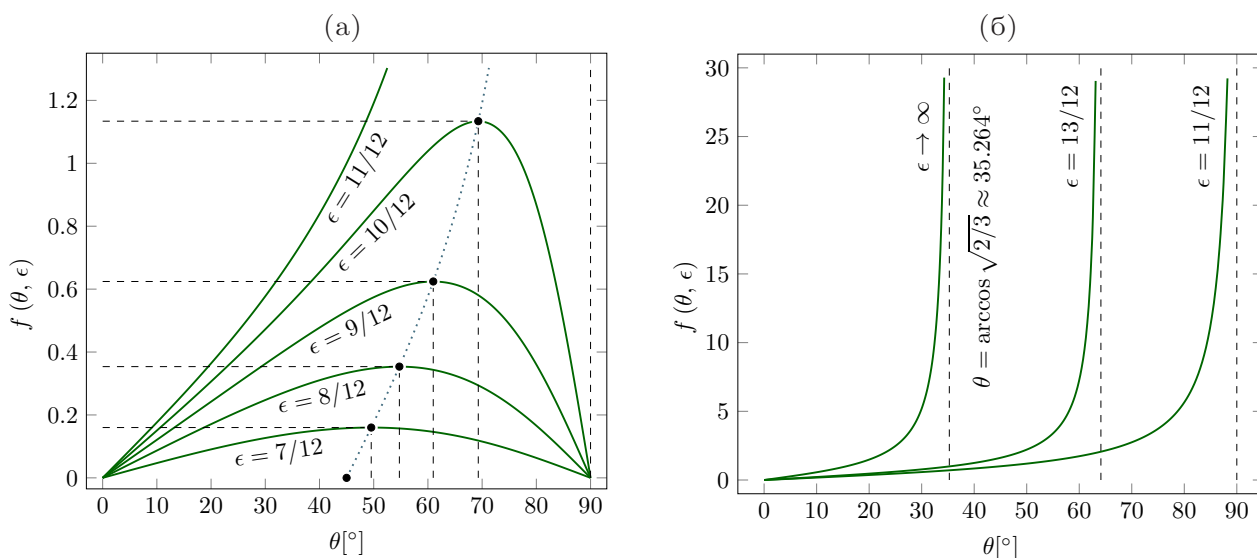
тј. $\theta_{\epsilon}^* \leq \theta_{\epsilon}^{(max)}$ у области $1/2 < \epsilon < 11/12$. После краћих трансформација, неједнакост $\theta_{\epsilon}^* \leq \theta_{\epsilon}^{(max)}$ се преводи у $g(\epsilon)\sqrt{1 + \mu^2 - \mu^2 g^2(\epsilon)} \leq 1 + \mu^2 - \mu^2 g^2(\epsilon)$, што увек важи у овој области, јер је $-\infty < g(\epsilon) < -1$,

а једнакост се добија за $\theta_{\epsilon}^* = \theta_{\epsilon}^{(max)} \Leftrightarrow g^2(\epsilon) = (1 + \mu^2)/\mu^2$. У области $11/12 \leq \epsilon < \infty$ увек стоји да је $\theta_{\epsilon}^* < \theta_{\epsilon}^{(asym)}$ без ограничења на μ . Ова строга неједнакост се своди на $\sqrt{1 + \mu^2 - \mu^2 g^2(\epsilon)} > g(\epsilon)$, што је

тачно с обзиром на $-1 \leq g(\epsilon) < 1/3$. Као пример, $\epsilon = 11/12 \Rightarrow g = -1 \Rightarrow \theta_{11/12}^* = \frac{1}{2} \arccos \frac{1 - \mu^2}{1 + \mu^2}$, што даје $\theta_{11/12}^* = 45^\circ$ за $\mu = 1$. У закључку,

$$\theta_{\epsilon}^* = \begin{cases} \text{не постоји} & \mu_c < \mu < \infty \wedge 1/2 < \epsilon < 11/12, \\ \frac{1}{2} \arccos \frac{\mu^2 g(\epsilon) + \sqrt{1 + \mu^2 - \mu^2 g^2(\epsilon)}}{1 + \mu^2} & (0 \leq \mu \leq \mu_c \wedge 1/2 < \epsilon < 11/12) \vee (0 \leq \mu < \infty \wedge 11/12 \leq \epsilon < \infty). \end{cases}$$

- (б) (i) Закон одржања магнетног флукса у суперпроводницима гласи: $\Phi_c^{(ext)} + \Phi_c^{(self)} = const$, где је $\Phi_c^{(ext)} = \vec{B} \cdot \vec{S}_c = Ba^2 \cos \vartheta$ спољашњи магнетни флукс у односу на контуру c , док је $\Phi_c^{(self)} = Li(\vartheta)$ сопствени магнетни флукс који се противи промени спољашњег индуковањем тренутне струје јачине $i(\vartheta)$. Видети слику 5(б). Укупан магнетни флукс не сме да се мења у суперпроводницима, јер по Омовом закону нема укупног индукованог напона ($R = 0 \Omega$). Почетна вредност укупног магнетног флукса ($\vartheta = 0^\circ$) износи Ba^2 , а крајња ($\vartheta = 90^\circ$) при принудном обртању износи Li_s , па је коефицијент самоиндукције стога $L = Ba^2/i_s$. Одавде добијамо да је $i(\vartheta) = i_s(1 - \cos \vartheta)$.



Слика 7: (а) Угаона зависност функције $f(\theta, \epsilon)$ за неколико вредности параметра ϵ таквих да је: (а) $1/2 \leq \epsilon \leq 11/12$ и (б) $11/12 \leq \epsilon < \infty$.

- (ii) Као у првом делу задатка под (а), једначине кретања по II Њутновом закону за смер ротације дат на слици 5(б) записујемо у виду

$$I\ddot{\vartheta} = mga \sin \vartheta / 2 - p_m B \sin \vartheta, \quad (7)$$

$$ma\ddot{\vartheta}/2 = F_{tr} \cos \vartheta - N \sin \vartheta + mg \sin \vartheta, \quad (8)$$

$$ma\dot{\vartheta}^2/2 = mg \cos \vartheta - N \cos \vartheta - F_{tr} \sin \vartheta. \quad (9)$$

Закон одржања енергије у овом случају гласи

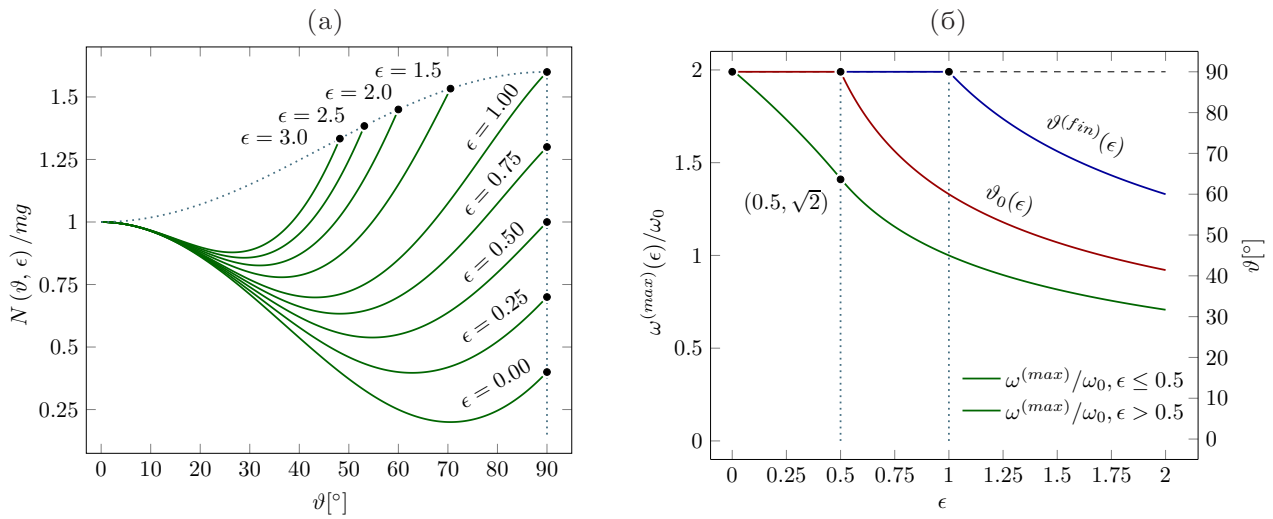
$$mga \cos \vartheta / 2 + I\dot{\vartheta}^2 / 2 + W_p = mga / 2, \quad (10)$$

где је $W_p = Li^2(\vartheta)/2$ потенцијална енергија магнетног дипола чија се струја индукује. Наиме, магнетно поље споља индукује електромоторну силу у суперпроводном раму $\mathcal{E}_{ind} = -d\Phi_c^{(ext)}/dt = +d\Phi_c^{(self)}/dt = Ldi(\vartheta)/dt$, док је укупна електромоторна сила у суперпроводном раму равна нули ($-\mathcal{E}_{ind} + Ldi(\vartheta)/dt = 0$). Дакле, елементарни рад магнетног поља за време dt при јачини струје $i(\vartheta)$ износи $dW_p = \mathcal{E}_{ind}i(\vartheta)dt = Li(\vartheta)di(\vartheta)$, па је $W_p = Li^2(\vartheta)/2$. Алтернативно, $dW_p = -i(\vartheta)d\Phi_c^{(ext)}/2$. Видимо да се због индуковане струје овде појављује фактор $1/2$, за разлику од случаја када је $i = const$ [случај (а)]. Услов $F_{tr} \leq \mu N$ је увек задовољен, јер је по услову задатка $\mu \rightarrow \infty$, тако да проклизавања нема. Даљим комбиновањем једначина (7)–(10) следи

$$N(\vartheta, \epsilon) = \frac{3}{5}mg \left(\frac{2}{3} + 3 \cos^2 \vartheta - 2 \cos \vartheta + 2\epsilon (1 - \cos \vartheta) (\cos \vartheta - \cos 2\vartheta) \right). \quad (11)$$

Како је $N(\vartheta, \epsilon) > N(\vartheta, 0) = \frac{3}{5}mg \left(\frac{2}{3} + 3 \cos^2 \vartheta - 2 \cos \vartheta \right) > 0$, закључујемо да је $N(\vartheta, \epsilon) > 0, \forall \epsilon \in (0, \infty)$.

Другим речима, неће доћи до потпуног одвајања рама од подлоге ни за једно позитивно ϵ . Међутим, на овом месту је неопходно продискутовати могућност заустављања рама пре $\vartheta = 90^\circ$. Рам се зауставља при $\dot{\vartheta} = 0$. Заменом овог услова у (10) налазимо да је $\vartheta^{(fin)}(\epsilon) = 90^\circ$ за $\epsilon \in (0, 1)$ и $\vartheta^{(fin)}(\epsilon) = \arccos(1 - 1/\epsilon)$ за $\epsilon \in [1, \infty)$, где је $\vartheta^{(fin)}(\epsilon)$ крајњи угао отклона када се рам заустави. Видимо да се рам увек принудно зауставља због подлоге за $0 < \epsilon < 1$, док за $\epsilon \geq 1$ заустављање рама се јавља услед закочног момента сила магнетног поља. Случај $\epsilon = 1$ одговара углу $\vartheta^{(fin)}(\epsilon = 1) = 90^\circ$, али се ово заустављање не јавља због постојања подлоге као баријере у кретању. Видети слику 8(а) где је, у јединицама mg , представљена



Слика 8: (а) Угаона зависност силе нормалне реакције подлоге изражене у јединицама mg за извешан број вредности параметра ϵ . (б) Зависност максималне угаоне брзине рама изражене у јединицама ω_0 од параметра ϵ (лево) и зависности $\vartheta_0(\epsilon)$ и $\vartheta^{(fin)}(\epsilon)$ (десно).

угаона зависност $N(\vartheta, \epsilon)$ за неколико ϵ карактеристичних вредности. На слици 8(б) је плавом линијом приказана зависност $\vartheta^{(fin)}(\epsilon)$.

(iii) На основу једначина (7)–(10) добијамо да је

$$F_{tr}(\vartheta, \epsilon) = \frac{3}{5} mg (-2 + 3 \cos \vartheta + 2\epsilon (1 - \cos \vartheta) (1 - 2 \cos \vartheta)) \sin \vartheta. \quad (12)$$

Како је $\sin \vartheta \geq 0$ у изразу за $F_{tr}(\vartheta, \epsilon)$ у једначини (12), анализом квадратне функције по $\cos \vartheta$ налазимо да F_{tr} мења знак при $\vartheta^{(c)}(\epsilon) = \arccos h(\epsilon)$, где је $h(\epsilon) \equiv \frac{3(2\epsilon - 1) + \sqrt{8 + (2\epsilon - 1)^2}}{8\epsilon}$. При томе, увек важи да је $0 < h(\epsilon) < 1$ за $\epsilon \in (0, 1)$ и $1 - 1/\epsilon < h(\epsilon) < 1$ за $\epsilon \in [1, \infty)$, па је $\vartheta^{(c)}(\epsilon) < \vartheta^{(fin)}(\epsilon), \forall \epsilon \in (0, \infty)$. Постоји и друго решење квадратне једначине: $\vartheta^{(c^*)}(\epsilon) = \arccos h^*(\epsilon)$, где је $h^*(\epsilon) \equiv \frac{3(2\epsilon - 1) - \sqrt{8 + (2\epsilon - 1)^2}}{8\epsilon}$. Међутим, како у том случају увек важи да је $1 - 1/\epsilon < h^*(\epsilon) < 0$ за $\epsilon \in (0, 1)$ и $0 \leq h^*(\epsilon) \leq 1 - 1/\epsilon$ за $\epsilon \in [1, \infty)$, добија се да је $\vartheta^{(c^*)}(\epsilon) \geq \vartheta^{(fin)}(\epsilon) > \vartheta^{(c)}(\epsilon), \forall \epsilon \in (0, \infty)$, где једнакост важи за $\epsilon = 1$. Анализа овог решења се из овог разлога не узима у обзир.

(iv) Будући да постоји могућност да се рам заустави пре него $\vartheta = 90^\circ$, очекујемо да у неком моменту t ($\vartheta(t) = \vartheta_0$) рам досегне максималну угаону брзину ($\dot{\vartheta}(t) = \omega^{(max)}$), када је $\ddot{\vartheta}(t) = 0$. Овај услов уврштавамо у (7) што даје $\vartheta_0(\epsilon) = 90^\circ$ за $\epsilon \in (0, 1/2]$ и $\vartheta_0(\epsilon) = \arccos(1 - 1/2\epsilon)$ за $\epsilon \in (1/2, \infty)$. Видети слику 8(б) где је црвеном линијом дата зависност $\vartheta_0(\epsilon)$. Из једначине (10) налазимо да је $\omega^{(max)}(\epsilon) = 2\omega_0\sqrt{1 - \epsilon}$ за $\epsilon \in (0, 1/2]$ и $\omega^{(max)}(\epsilon) = \omega_0/\sqrt{\epsilon}$ за $\epsilon \in (1/2, \infty)$, где је $\omega_0 \equiv \sqrt{3g/5a}$. Видети слику 8(б) на којој је зеленом линијом приказана зависност $\omega^{(max)}(\epsilon)$. Дакле,

$$\vartheta^{(fin)}(\epsilon) = \begin{cases} 90^\circ & 0 < \epsilon < 1, \\ \arccos(1 - 1/\epsilon) & 1 \leq \epsilon < \infty. \end{cases}$$

$$\vartheta_0(\epsilon) = \begin{cases} 90^\circ & 0 < \epsilon \leq 1/2, \\ \arccos(1 - 1/2\epsilon) & 1/2 < \epsilon < \infty, \end{cases} \quad \omega^{(max)}(\epsilon) = \begin{cases} 2\omega_0\sqrt{1 - \epsilon} & 0 < \epsilon \leq 1/2, \\ \omega_0/\sqrt{\epsilon} & 1/2 < \epsilon < \infty. \end{cases}$$

Интересантно је приметити да у овом случају рам изводи једну врсту осцилаторног кретања унутар $0^\circ \leq \vartheta \leq \vartheta^{(fin)}(\epsilon)$ за $\epsilon > 1/2$. Из једначине (7) се налази да тренутно угаоно убрзање рама од његовог



тренутног отклона ϑ при датом ϵ зависи као $\ddot{\vartheta} = 2\omega_0^2(1 - 2\epsilon(1 - \cos\vartheta)) \sin\vartheta$. $\ddot{\vartheta}$ је увек ненегативно у опсегу $\epsilon \in (0, 1/2]$. Специјално, $\ddot{\vartheta} = 0$ за $\epsilon = 1/2$ при отклону од 90° када је угаона брзина рама максимална и износи $\omega_0\sqrt{2}$. У опсегу $\epsilon \in (1/2, \infty)$, угаоно убрзање мења знака при тренутном углу $\vartheta_0(\epsilon) = \arccos(1 - 1/2\epsilon)$ када је угаона брзина максимална и износи $\omega_0/\sqrt{\epsilon}$. Међутим, за $1/2 \leq \epsilon < 1$ угаоно убрзање при финалном углу (увек 90°) износи $2\omega_0^2(1 - 2\epsilon) \leq 0$. С друге стране, за $\epsilon \geq 1$ крајњи угао отклона износи $\arccos(1 - 1/\epsilon)$, док је угаоно убрзање рама тада $-2\omega_0^2\sqrt{2\epsilon - 1}/\epsilon$.

Задатке припремили: *др Ненад Вукмировић* (1) и *др Дејан М. Вокић* (3), Институт за физику у Београду
Александар Буква (2), Институт Лоренц за теоријску физику, Лајден, Холандија

Рецензенти: *др Дејан М. Вокић* (1), *др Михаило Чубровић* (2) и *Владимир Вељић* (3), Институт за физику у Београду
Председник Комисије за такмичења ученика средњих школа: *др Божидар Николић*, Физички факултет, Београд