

Državno 2018, 8. razred, zadatak 3

Na stolu leže dve daske različitih dužina, a jednakih masa. Koeficijenti trenja su $\mu_1 = 0,050$ (između dasaka) i $\mu_2 = 0,10$ (između donje daske i podloge). Odrediti vreme posle kog će se daske zaustaviti ako čekić udari u: a) gornju dasku, b) donju dasku. U oba slučaja čekić dasci saopštava horizontalnu početnu brzinu $v_0 = 1,0 \frac{m}{s}$. Donja daska je dovoljno duga tako da je gornja sve vreme na njoj celom dužinom. Ubrzanje Zemljine teže je $g = 9,81 \frac{m}{s^2}$.

Deo zadatka pod (a) je jasan, i tu nema primedbi na rešenje. Međutim, deo pod (b) je malo problematičan. Sile normalne reakcije između dasaka i između donje daske i poda su konstantne tokom vremena, i iznose redom

$$N^{\text{gornje}} = mg, \quad (1)$$

$$N^{\text{donje}} = 2mg. \quad (2)$$

U trenutku $t = 0$, donja daska dobija brzinu v_0 u pozitivnom smeru x -ose. Očigledno, zbog relativnog kretanja između donje daske i poda, na donju dasku deluje sila trenja u negativnom smeru x -ose, čiji je intenzitet

$$F_1^{\text{donje}} = \mu_2 N^{\text{donje}} = 2\mu_2 mg. \quad (3)$$

Takođe, zbog relativnog kretanja između dasaka, na donju dasku deluje sila trenja u negativnom smeru x -ose, a po III Njutnovom zakonu, sila istog intenziteta deluje i na gornju dasku, ali u pozitivnom smeru x -ose. Intenzitet ove sile je

$$F_1^{\text{gornje}} = \mu_1 N^{\text{gornje}} = \mu_1 mg. \quad (4)$$

Jednačine kretanja dasaka su

$$ma_1^{\text{donje}} = -F_1^{\text{donje}} - F_1^{\text{gornje}} \implies a_1^{\text{donje}} = -(\mu_1 + 2\mu_2)g, \quad (5)$$

$$ma_1^{\text{gornje}} = F_1^{\text{gornje}} \implies a_1^{\text{gornje}} = \mu_1 g. \quad (6)$$

Dakle, donja daska usporava od početne brzine v_0 , a gornja daska ubrzava bez početne brzine. Ove jednačine kretanja važe sve dok se ne izjednače brzine dasaka (trenutak t_1), jer tada prestaje relativno kretanje između dasaka. Neka je u trenutku t_1 brzina obe daske v . Tada važe jednačine

$$v = v_0 + a_1^{\text{donje}} t_1 = v_0 - (\mu_1 + 2\mu_2)gt_1, \quad (7)$$

$$v = a_1^{\text{gornje}} t_1 = \mu_1 g t_1. \quad (8)$$

Iz prethodne dve jednačine sledi

$$t_1 = \frac{v_0}{2g(\mu_1 + \mu_2)}, \quad (9)$$

$$v = \frac{\mu_1 v_0}{2(\mu_1 + \mu_2)}. \quad (10)$$

Nakon trenutka t_1 , jednačine kretanja se menjaju. Moguća su dva scenarija: (A) donja daska nastavlja da usporava po podlozi, a gornja daska, zbog nedovoljno velikog trenja, proklizava po donjoj dasci; (B) donja daska nastavlja da usporava, a gornja daska se, zbog dovoljno velikog trenja, kreće zajedno sa donjom daskom kao jedna celina. Pretpostavimo da važi slučaj (A). Intenziteti sila trenja ostaju isti kao u prvom slučaju, te važi

$$F_2^{\text{donje}} = F_1^{\text{donje}} = 2\mu_2 mg, \quad (11)$$

$$F_2^{\text{gornje}} = F_1^{\text{gornje}} = \mu_1 mg. \quad (12)$$

Smer sile F_2^{donje} se nije promenio, i dalje je u negativnom smeru x -ose. Smer sile F_2^{gornje} se jeste promenio, i sada ova sila deluje na donju dasku u pozitivnom smeru x -ose, a na gornju dasku u negativnom smeru x -ose. Jednačine kretanja su

$$ma_2^{\text{donje}} = F_2^{\text{gornje}} - F_2^{\text{donje}} \implies a_2^{\text{donje}} = (\mu_1 - 2\mu_2)g, \quad (13)$$

$$ma_2^{\text{gornje}} = -F_2^{\text{gornje}} \implies a_2^{\text{gornje}} = -\mu_1 g. \quad (14)$$

Pod kojim uslovima važi slučaj (A)? Pretpostavili smo da se, u odnosu na donju dasku, gornja daska kreće u pozitivnom smeru x -ose. To znači da u svakom trenutku mora da važi

$$v^{\text{gornje}} > v^{\text{donje}}. \quad (15)$$

Kako je $v^{\text{gornje}} = v + a_2^{\text{gornje}} t$ i $v^{\text{donje}} = v + a_2^{\text{donje}} t$, sledi uslov $a_2^{\text{gornje}} > a_2^{\text{donje}}$, odnosno, nakon sređivanja,

$$\mu_2 > \mu_1. \quad (16)$$

Ovo je veoma bitno. To je uslov koji koeficijenti trenja moraju da zadovoljavaju da bi važio slučaj (A). Vidimo da, ako važi ovaj uslov, važi i $a_2^{\text{donje}} < 0$, $a_2^{\text{gornje}} < 0$, kao i $|a_2^{\text{donje}}| > |a_2^{\text{gornje}}|$. Dakle, obe daske se kreću usporeno, pri čemu donja daska ima veću apsolutnu vrednost usporenja. Dakle, ona će se prva zaustaviti nakon vremena

$$t_2^{\text{donje}} = \frac{v}{-a_2^{\text{donje}}} = \frac{\mu_1 v_0}{2g(\mu_1 + \mu_2)(2\mu_2 - \mu_1)}. \quad (17)$$

Zaustavljanje donje daske ne utiče na kretanje gornje daske, tako da jednačina (14) važi sve do zaustavljanja gornje daske. To se dešava nakon vremena

$$t_2^{\text{gornje}} = \frac{v}{-a_2^{\text{gornje}}} = \frac{v_0}{2g(\mu_1 + \mu_2)}. \quad (18)$$

Primetimo da je $t_2^{\text{gornje}} = t_1$. Ovo ima smisla: intenzitet ubrzanja gornje daske je sve vreme bio isti, samo se u trenutku t_1 promenio smer. Za očekivati je da će vreme potrebno da gornja daska dostigne brzinu v biti jednako vremenu koje je potrebno da se zaustavi sa početnom brzinom v . Ukupno vreme kretanja dasaka je

$$t^{\text{donje}} = t_1 + t_2^{\text{donje}} = \frac{\mu_2 v_0}{g(\mu_1 + \mu_2)(2\mu_2 - \mu_1)}, \quad (19)$$

$$t^{\text{gornje}} = t_1 + t_2^{\text{gornje}} = \frac{v_0}{g(\mu_1 + \mu_2)}. \quad (20)$$

Podsetimo se da je neophodno da važi uslov (16) da bi ovo rešenje bilo tačno. Ukoliko ovaj uslov ne važi, tj. ako je $\mu_2 \leq \mu_1$, tada ne važi jednačina (15). To znači da se gornja daska neće kretati u odnosu na donju u pozitivnom smeru x -ose. Kako se gornja daska ne može u odnosu na donju kretati u negativnom smeru x -ose (ne postoji sila koja bi nakon trenutka t_1 pokrenula gornju dasku u tom smeru), sledi da će gornja daska mirovati u odnosu na donju dasku. Dakle, daske se kreću kao jedna celina. Jednačina kretanja je

$$(m + m)a_2 = -F_2^{\text{donje}} \implies a_2 = -\mu_2 g. \quad (21)$$

Vreme do zaustavljanja obe daske je

$$t_2 = \frac{v}{-a_2} = \frac{\mu_1 v_0}{2g\mu_2(\mu_1 + \mu_2)}. \quad (22)$$

Ukupno vreme kretanja je

$$t^{\text{donje}} = t^{\text{gornje}} = t_1 + t_2 = \frac{v_0}{2\mu_2 g}. \quad (23)$$

Dakle, da rezimiramo:

$$\begin{cases} t^{\text{donje}} = \frac{\mu_2 v_0}{g(\mu_1 + \mu_2)(2\mu_2 - \mu_1)}, & \text{za } \mu_2 > \mu_1 \\ t^{\text{donje}} = \frac{v_0}{2\mu_2 g}, & \text{za } \mu_2 \leq \mu_1 \\ t^{\text{gornje}} = \frac{v_0}{g(\mu_1 + \mu_2)}, & \text{za } \mu_2 > \mu_1 \\ t^{\text{gornje}} = \frac{v_0}{2\mu_2 g}, & \text{za } \mu_2 \leq \mu_1 \end{cases} \quad (24)$$

Za brojne vrednosti date u zadatku važi $\mu_2 > \mu_1$. Rešenje je

$$t^{\text{donje}} = \frac{\mu_2 v_0}{g(\mu_1 + \mu_2)(2\mu_2 - \mu_1)} = 0,45 \text{ s}, \quad (25)$$

$$t^{\text{gornje}} = \frac{v_0}{g(\mu_1 + \mu_2)} = 0,68 \text{ s}. \quad (26)$$

Ukoliko bismo uzeli vrednost $\mu_2 = 0,10$, a pretpostavili da je $\mu_2 \leq \mu_1$, dobili bismo rešenje $t^{\text{donje}} = t^{\text{gornje}} = 0,51 \text{ s}$, što je isto kao i zvanično rešenje Komisije. Međutim, ovo rešenje je pogrešno, jer je $\mu_2 > \mu_1$.