

II разред

1. Пошто је примљена топлота мала, процес се на  $p - V$  дијаграму може приближно представити троуглом. Рад је тада једнак  $A \approx (p_2 - p_3)(V_2 - V_1)/2$  [2 п]. У делу 1-2 имамо  $Q \approx p_1(V_2 - V_1) + C_V \Delta T$  одакле  $T_2 - T_1 = Q/C_V - p_2(V_2 - V_1)/C_V$  [2 п]. Са друге стране, пошто на делу 1-2 знамо топлотни капацитет, важи  $T_2 - T_1 = Q/C$  [1 п]. Изједначавањем ова два израза  $V_2 - V_1$  можемо изразити као  $V_2 - V_1 = Q/p_1 \times (1 - C_V/C)$  [2 п]. За притиске имамо  $p_3 = p_1 V_1/V_2 = p_1/(1 + (V_2 - V_1)/V_1) \approx p_1(1 - (V_2 - V_1)/V_1)$  [3 п], где смо искористили приближну формулу из задатка, и  $p_2 = RT_2/V_2 = R(T_2 - T_1 + T_1)/(V_1 + V_2 - V_1) = RT_1/V_1 \times (1 + (T_2 - T_1)/T_1 - (V_2 - V_1)/V_1)$  [3 п] уз исту приближну формулу. Тако одузимањем добијамо  $p_2 - p_3 = p_1(T_2 - T_1)/T_1 = p_1 Q/CT_1$  [2 п]. Сада у изразу за рад имамо  $A = Q^2(1 - C_V/C)/2CT_1$  [3 п],  $A = 1.6 \times 10^{-5} \text{ J}$  [2 п].

2. Притисак течности у подножју капиларе мора бити исти као и ван капиларе, а он је умањен за Лапласов притисак и увећан због хидростатичког притиска течности која се попела уз капилару, што даје  $2\gamma/r = \rho gh$ , где је  $h$  тражена висина, а  $r$  полупречник капиларе на висини  $h$  [5 п]. За мали угао  $\alpha$  имамо  $r = h\alpha/2$  [5 п]. Заменом добијамо  $h = \sqrt{4\gamma/\rho g \alpha}$  [5 п]. Видимо да резултат не зависи од притиска ваздуха (који делује на цео систем, унутар и изван капиларе), па се неће променити ако се овај повећа 3 пута [5 п].

3. (а) Узмимо да је број честица у стању са енергијом  $-\epsilon$  једнак  $N_\downarrow$  док је број честица са енергијом  $\epsilon$  једнак  $N_\uparrow$ . Означимо разлику ова два броја са  $\xi = N_\uparrow - N_\downarrow$ . Сада број честица у горњем и доњем стању можемо да изразимо преко  $\xi$  и укупног броја честица  $N$ :  $N_\downarrow = \frac{N-\xi}{2}$  и  $N_\uparrow = \frac{N+\xi}{2}$ . Број комбинација којима можемо да реализујемо стање са укупном енергијом  $E = \epsilon \xi$  је  $\Omega_E = \frac{N!}{(\frac{N-\xi}{2})!(\frac{N+\xi}{2})!}$  [3 п]. Одавде следи да је Болцманова ентропија за задату вредност енергије  $S_E = k_B \ln \left( \frac{N!}{(\frac{N-\xi}{2})!(\frac{N+\xi}{2})!} \right)$  [3 п].

(б) Користећи добијену зависност за ентропију система и задату релацију за температуру имамо  $\frac{1}{T} = \frac{k_B}{2\epsilon} \ln \left( \frac{N-\xi+1}{N+\xi+1} \right)$  [5 п], одавде можемо да изразимо  $\xi$  као  $\xi = \frac{E}{\epsilon}$  и да вратимо у претходни израз да бисмо добили  $T(E) = \frac{2\epsilon}{k_B} \ln^{-1} \left( \frac{(N+1)\epsilon - E}{(N+1)\epsilon + E} \right)$  [5 п].

(в) Убацимо задатке нумеричке вредности из задатка у добијени израз за температуру на енергији  $E_1$  добијамо  $T(E_1) = 57.3 \cdot 10^3 \text{ K}$  [2 п] док за енергију  $E_2$  имамо  $T(E_2) = -57.3 \cdot 10^3 \text{ K}$  [2 п]. Коментар. Видимо да је температура за другу енергију негативна. Ова појава на први поглед изгледа парадоксално да је температура система негативна, међутим ова ситуација је могућа ако постоји тзв. инверзна насељеност, тј. ако много честица седи у нивоима са високим енергијама. Ако се при додавању енергије систему ентропија смањује тада, по дефиницији, имамо негативну температуру. Негативна температура је чак топлија од позитивне, ако бисмо довели два тела, једно са позитивном а друго са негативном температуром у контакт, енергија би прелазила са тела са негативном температуром на тело са позитивном.

4. У равнотежном случају важи:  $mg - kx - \frac{Q\lambda}{2\pi\epsilon_0(H-d+x)} = 0$  [3 п]. Електрично поље жице је добијено применом теореме Гаус-Остроградског  $E2r\pi h = \frac{\lambda h}{\epsilon_0}$ , тј. јачина поља је  $E = \frac{\lambda}{2r\pi\epsilon_0}$  [4 п]. Решење полазне квадратне једначине је

$x_{1,2} = \frac{-mg+k(H-d) \pm \sqrt{(mg-k(H-d))^2 + 4k(mg(H-d) - \frac{Q\lambda}{2\pi\epsilon_0})}}{-2k}$  [4 п]. Убацавањем бројних вредности датих у задатку добијамо за решења  $x_1 = -946.4 \text{ mm}$ ,  $x_2 = -17.5 \text{ mm}$  [2 п]. Како је речено да је деформација мала, бирамо друго решење и висина куглице ће бити  $d - x_2 = 47.5 \text{ mm}$  [1 п]. Ако се нити загревају, долази до њиховог истезања и на куглицу делује већа Кулонова сила. Једино што се мења у решењу за равнотежни положај јесте да је висина  $H$  умањена и постаје  $H - \Delta l$ , где је  $\Delta l = \alpha l \Delta T$  [4 п]. Убацавањем бројних вредности добијамо да је нови равнотежни положај  $x_2 = -17.8 \text{ mm}$  [1 п]. Нова висина куглице је  $47.8 \text{ mm}$  [1 п].

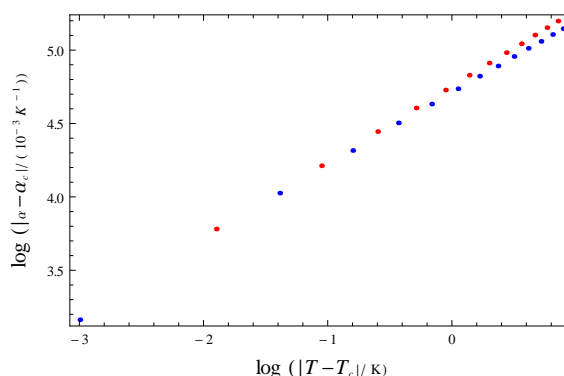
5. (а) Критична тачка одговара тачки у којој зависност из опадајуће постаје растућа. Из табеле видимо да се ово дешава између  $T = 2.5 \text{ K}$  и  $T = 2.6 \text{ K}$ , па је  $T_c \approx 2.55$  [4 п] (признати и било коју другу процену између  $T = 2.5 \text{ K}$  и  $T = 2.6 \text{ K}$ ). Ренормализовани коефицијент термичког ширења у тој тачки је по табели приближно једнак нули:  $\alpha_c \approx 0$  [3 п] (такође признати и друге разумне процене).

(б) 1. начин Зависност  $|\alpha - \alpha_c| = f(|T - T_c|)$  можемо приказати на логаритамској скали, као  $\ln |\alpha - \alpha_c| = g(\ln |T - T_c|)$ . Дата је табела са вредностима логаритама, за податке лево и десно од критичне тачке [2 п].

Приказујући садржај табеле на графику [4 п], видимо да је зависност приближно линеарна, тј. облика  $\ln |\alpha - \alpha_c| = k_\pm \cdot \ln |T - T_c| + n_\pm$ . Из зависности  $\alpha - \alpha_c = A_\pm \cdot |T - T_c|^{\gamma_\pm}$  датих у задатку логаритмовањем добијамо

$\ln \frac{T_c - T}{1\text{K}}$	0.896	0.811	0.718	0.615	0.501	0.372	0.223	0.049	-0.163	-0.431	-0.799	-1.386	-3.000
$\ln \frac{ \alpha - \alpha_c }{10^{-3}\text{K}^{-1}}$	5.146	5.106	5.060	5.012	4.957	4.891	4.822	4.736	4.632	4.504	4.316	4.026	3.163
$\ln \frac{T - T_c}{1\text{K}}$	-1.897	-1.050	-0.598	-0.288	-0.051	0.140	0.223	0.300	0.438	0.560	0.668	0.765	0.854
$\ln \frac{ \alpha - \alpha_c }{10^{-3}\text{K}^{-1}}$	3.781	4.212	4.445	4.606	4.728	4.891	4.829	4.912	4.982	5.043	5.102	5.153	5.198

$\ln |\alpha - \alpha_c| = \gamma_{\pm} \cdot \ln |T - T_c| + \ln A_{\pm}$ , тј. исту линеарну зависност логаритама као што график сугерише **3 п**.  
Дакле, можемо "од ока" повући праве кроз оба скупа података, и наћи приближно коефицијенте правца  $\gamma_{\pm}$ :  
 $\gamma_+ \approx \gamma_- \approx 0.5$  **4 п** (тачан линеарни МНК фит даје  $\gamma_+ = 0.50, \gamma_- = 0.52$ ).



- (б) 2. начин Можемо представити зависност  $|\alpha - \alpha_c| = f(|T - T_c|)$  на графику **4 п**, и потом скицирати функцију  $f_{\pm}(x) = a_{\pm}x^{\gamma_{\pm}}$  за неколико вредности  $\gamma_{\pm}$  (за сваки скуп података посебно, слика: црне криве  $\gamma = 0.3$ , зелене криве  $\gamma = 0.5$ , наранџасте криве  $\gamma = 0.7$ ) **5 п**, уз услов да крива пролази кроз нулу и последњу тачку. На тај начин видимо да функција са  $\gamma_+ \approx \gamma_- \approx 0.5$  најбоље пролази кроз тачке, па је то приближна вредност тражених експонената. **4 п**

