1. (а) За адијабатски процес имамо $T_1 = T_0(p_1/p_0)^{(\gamma-1)/\gamma} = 278.4\text{K}$ $\boxed{\textbf{3 п}}$.

   (б) Густина се по задатку понаша као $\rho_1 = \rho_0 - Kh_1$ где је K константа пропорционалности коју не знамо. Али знамо једначине стања за обе висине: $p_0 = \rho_0 RT_0/M$, $p_1 = (\rho_0 - Kh_1)RT_1/M$ $\boxed{\textbf{2 п}}$ и једначину за аеростатички притисак $p_0 - p_1 = \bar{\rho}gh_1$ $\boxed{\textbf{2 п}}$, где је $\bar{\rho} = (\rho_0 + \rho_1)/2 = \rho_0 - Kh_1/2$ средња густина између те две висине (због линеарности то је просто аритметичка средина). Сада можемо елиминисати K и M које не знамо и добити $h_1 = 2(p_0 - p_1)/\rho_0 g(1 + T_0p_1/T_1p_0) = 1505\text{m}$ $\boxed{\textbf{4 п}}$.

   (в) Температура се мења због адијабатског струјања и због кондензације кише. Адијабатско струјање даје $T_2' = T_1(p_2/p_1)^{(\gamma-1)/\gamma}$ $\boxed{\textbf{2 п}}$ а за кондензацију кише и загревање ваздуха важи $\Lambda mr = c_p m\Delta T$ $\boxed{\textbf{1 п}}$. Свеукупно $T_2 = T_2' + \Delta T = T_1(p_2/p_1)^{(\gamma-1)/\gamma} + \Lambda r/c_p = 263.86\text{K} + 1.12\text{K} = 264.98\text{K}$ $\boxed{\textbf{1 п}}$. Између M2 и M3 опет имамо само адијабатско струјање, па је $T_3 = T_2(p_0/p_2)^{(\gamma-1)/\gamma} = 299.8\text{K}$ $\boxed{\textbf{2 п}}$. Приметимо да је корекција $\Lambda r/c_p$ мала (десетак пута мања од адијабатске промене), па се зато може додати на адијабатску вредност T_2'. У супротном процес уопште не би могли сматрати ни приближно адијабатским.

   (г) Из укупне масе ваздуха по једном метру квадратном излучи се rm_0 кише, односно rm_0/t по јединици времена, па за $T = 3\text{h}$ падне rm_0T/t килограма кише по метру квадратном, што даје висину воденог стуба $y = rm_0T/t/\rho_v = 0.97\text{mm}$ где је ρ_v густина воде $\boxed{\textbf{3 п}}$.

2. Притисак течности у подножју капиларе мора бити исти као и ван капиларе, а он је умањен за Лапласов притисак и увећан због хидростатичког притиска течности која се попела уз капилару, што даје $2\gamma\cos\frac{\alpha}{2}/r = \rho gh$, где је h тражена висина, а r полупречник капиларе на висини h, док је $\alpha/2$ угао квашења (угао између површине течности и нормале на површ суда) $\boxed{\textbf{2 п}}$. За капилару која се сужава/проширује ка врху, имамо $r = r_0 \mp h\tan\frac{\alpha}{2}$ $\boxed{\textbf{1 п}}$. Заменом добијамо квадратну једначину $\mp\rho g\tan\frac{\alpha}{2}h^2 + \rho gr_0h - 2\gamma\cos\frac{\alpha}{2} = 0$ $\boxed{\textbf{2 п}}$. Тражимо само позитивна решења, па ако се капилара шири ка врху у обзир долази само $h_1 = (-r_0 + \sqrt{r_0^2 + 8\gamma\sin\frac{\alpha}{2}/\rho g})/2\tan\frac{\alpha}{2}$ $\boxed{\textbf{3 п}}$ или, ако је $h_1 > H$, течност се пење до краја капиларе, тј. до висине H $\boxed{\textbf{1 п}}$. За капилару која се сужава ка врху треба прво испитати знак дискриминанте $\rho gr_0^2 - 8\gamma\sin\frac{\alpha}{2}$. Ако је она негативна, решења нема, хидростатички притисак је недовољан да уравнотежи површински напон и течност се подиже до максималне могуће висине H $\boxed{\textbf{1 п}}$. Иначе су оба решења позитивна, $h_{2,3} = (r_0 \pm \sqrt{r_0^2 - 8\gamma\sin\frac{\alpha}{2}/\rho g})/2\tan\frac{\alpha}{2}$ $\boxed{\textbf{3 п}}$. Ако је $h_2 > H$ ili $h_3 > H$, онда опет максимална висина јесте H $\boxed{\textbf{1 п}}$.

3. (а) Узмимо да је број честица у стању са енергијом $-\epsilon$ једнак $N_\downarrow$ док је број честица са енергијом ϵ једнак $N_\uparrow$. Означимо разлику ова два броја са $\xi = N_\uparrow - N_\downarrow$. Сада број честица у горњем и доњем стању можемо да изразимо преко ξ и укупног броја честица N: $N_\downarrow = \frac{N-j}{2}$ и $N_\uparrow = \frac{N+j}{2}$. Број комбинација којима можемо да реализујемо стање са укупном енергијом $E = \epsilon\xi$ је $\Omega_E = \frac{N!}{(\frac{N-\xi}{2})!(\frac{N+\xi}{2})!}$ $\boxed{\textbf{5 п}}$. Одавде следи да је Болцманова ентропија за задату вредност енергије $S_E = k_B\ln\left(\frac{N!}{(\frac{N-\xi}{2})!(\frac{N+\xi}{2})!}\right)$ $\boxed{\textbf{2 п}}$.

   (б) Користећи добијену зависност за ентропију система и задату релацију за температуру имамо $\frac{1}{T} = \frac{k_B}{2\epsilon}\ln\left(\frac{N-\xi+1}{N+\xi+1}\right)$ $\boxed{\textbf{4 п}}$, одавде можемо да изразимо ξ као $\xi = \frac{E}{\epsilon}$ и да вратимо у претходни израз да бисмо добили $T(E) = \frac{2\epsilon}{k_B}\ln^{-1}\left(\frac{(N+1)\epsilon-E}{(N+1)\epsilon+E}\right)$ $\boxed{\textbf{5 п}}$.

   (в) Убацимо задатке нумеричке вредности из задатка у добијени израз за температуру на енергији E_1 добијамо $T(E_1) = 57.3\cdot 10^3$ K $\boxed{\textbf{2 п}}$ док за енергију E_2 имамо $T(E_2) = -57.3\cdot 10^3$ K $\boxed{\textbf{2 п}}$. *Коментар.* Видимо да је температура за другу енергију негативна. Ова појава на први поглед изгледа парадоксално да је температура система негативна, међутим ова ситуација је могућа ако постоји тзв. инверзна насељеност, тј. ако много честица седи у нивоима са високим енергијама. Ако се при додавању енергије систему ентропија смањује тада, по дефиницији, имамо негативну температуру. Негативна температура је чак топлија од позитивне, ако бисмо довели два тела, једно са позитивном а друго са негативном температуром у контакт, енергија би прелазила са тела са негативном температуром на тело са позитивном.

4. У равнотежном случају важи: $mg - kx - \frac{Q\lambda}{2\pi\epsilon_0(H-d+x)} = 0$ $\boxed{\textbf{3 п}}$. Електрично поље жице је добијено применом теореме Гаус-Остроградског $E2r\pi h = \frac{\lambda h}{\epsilon_0}$, тј. јачина поља је $E = \frac{\lambda}{2r\pi\epsilon_0}$ $\boxed{\textbf{4 п}}$. Решење полазне квадратне једначине је

$x_{1,2} = \frac{-mg+k(H-d)\pm\sqrt{(mg-k(H-d))^2+4k(mg(H-d)-\frac{Q\lambda}{2\pi\epsilon_0})}}{-2k}$ $\boxed{\textbf{4 п}}$. Убацивањем бројних вредности датих у задатку добијамо за решења $x_1 = -946.4\,\mathrm{mm}, x_2 = -17.5\,\mathrm{mm}$ $\boxed{\textbf{2 п}}$. Како је речено да је деформација мала, бирамо друго решење и висина куглице ће бити $d - x_2 = 47.5\,\mathrm{mm}$ $\boxed{\textbf{1 п}}$. Ако се нити загревају, долази до њиховог истезања и на куглицу делује већа Кулонова сила. Једино што се мења у решењу за равнотежни положај јесте да је висина H умањена и постаје $H - \Delta l$, где је $\Delta l = \alpha l \Delta T$ $\boxed{\textbf{4 п}}$. Убацивањем бројних вредности добијамо да је нови равнотежни положај $x_2 = -17.8\,\mathrm{mm}$ $\boxed{\textbf{1 п}}$. Нова висина куглице је $47.8\,\mathrm{mm}$ $\boxed{\textbf{1 п}}$.

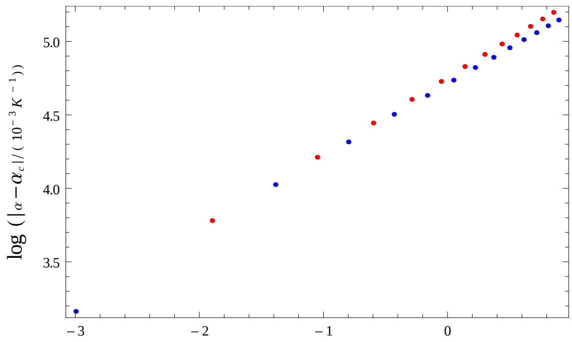
5. (а) Критична тачка одговара тачки у којој зависност из опадајуће постаје растућа. Из табеле видимо да се ово дешава између $T = 2.5\mathrm{K}$ и $T = 2.6\mathrm{K}$, па је $T_c \approx 2.55$ $\boxed{\textbf{4 п}}$ (признати и било коју другу процену између $T = 2.5\mathrm{K}$ и $T = 2.6\mathrm{K}$). Ренормализовани коефицијент термичког ширења у тој тачки је по табели приближно једнак нули: $\alpha_c \approx 0$ $\boxed{\textbf{3 п}}$ (такође признати и друге разумне процене).

(б) *1. начин* Зависност $|\alpha - \alpha_c| = f(|T - T_c|)$ можемо приказати на логаритамској скали, као $\ln|\alpha - \alpha_c| = g(\ln|T - T_c|)$. Дата је табела са вредностима логаритама, за податке лево и десно од критичне тачке $\boxed{\textbf{2 п}}$.

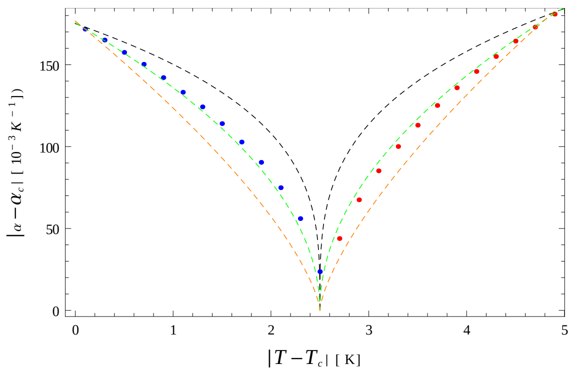
$\ln\frac{T_c-T}{1\mathrm{K}}$	0.896	0.811	0.718	0.615	0.501	0.372	0.223	0.049	-0.163	-0.431	-0.799	-1.386	-3.000
$\ln\frac{\|\alpha-\alpha_c\|}{10^{-3}\mathrm{K}^{-1}}$	5.146	5.106	5.060	5.012	4.957	4.891	4.822	4.736	4.632	4.504	4.316	4.026	3.163

$\ln\frac{T-T_c}{1\mathrm{K}}$	-1.897	-1.050	-0.598	-0.288	-0.051	0.140	0.223	0.300	0.438	0.560	0.668	0.765	0.854
$\ln\frac{\|\alpha-\alpha_c\|}{10^{-3}\mathrm{K}^{-1}}$	3.781	4.212	4.445	4.606	4.728	4.891	4.829	4.912	4.982	5.043	5.102	5.153	5.198

Приказујући садржај табеле на графику $\boxed{\textbf{4 п}}$, видимо да је зависност приближно линеарна, тј. облика $\ln|\alpha - \alpha_c| = k_\pm \cdot \ln|T - T_c| + n_\pm$. Из зависности $\alpha - \alpha_c = A_\pm \cdot |T - T_c|^{\gamma_\pm}$ датих у задатку логаритмовањем добијамо $\ln|\alpha - \alpha_c| = \gamma_\pm \cdot \ln|T - T_c| + \ln A_\pm$, тј. исту линеарну зависност логаритама као што график сугерише $\boxed{\textbf{3 п}}$. Дакле, можемо "од ока"повући праве кроз оба скупа података, и наћи приближно коефицијенте правца $\gamma_\pm$: $\gamma_+ \approx \gamma_- \approx 0.5$ $\boxed{\textbf{4 п}}$ (тачан линеарни МНК фит даје $\gamma_+ = 0.50, \gamma_- = 0.52$).



(б) *2. начин* Можемо представити зависност $|\alpha - \alpha_c| = f(|T - T_c|)$ на графику $\boxed{\textbf{4 п}}$, и потом скицирати функцију $f_\pm(x) = a_\pm x^{\gamma_\pm}$ за неколико вредности $\gamma_\pm$ (за сваки скуп података посебно, слика: црне криве $\gamma = 0.3$, зелене криве $\gamma = 0.5$, наранџасте криве $\gamma = 0.7$) $\boxed{\textbf{5 п}}$, уз услов да крива пролази кроз нулу и последњу тачку. На тај начин видимо да функција са $\gamma_+ \approx \gamma_- \approx 0.5$ најбоље пролази кроз тачке, па је то приближна вредност тражених експонената. $\boxed{\textbf{4 п}}$



Задатке припремили: ***Михаило Чубровић***, Институт за физику, Београд
Александар Буква, Институт за физику, Београд
Рецензент: ***др Божидар Николић***, Физички факултет, Београд
Председник Комисије за такмичења средњих школа: ***др Божидар Николић***, Физички факултет, Београд