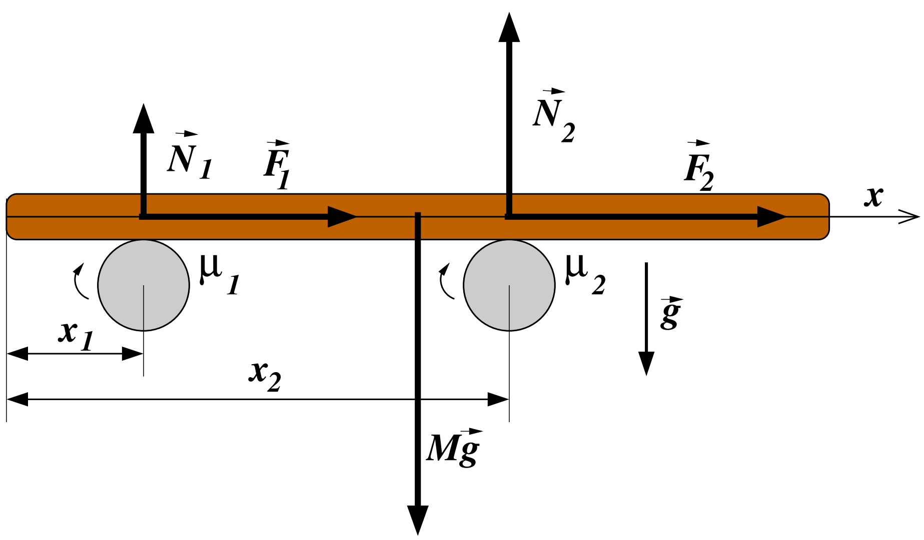
1. Обележимо растојање између тачке додира првог ваљка и њој ближег краја балвана са x_1, а растојање између истог краја балвана и тачке додира са другим ваљком са x_2, као на приложеној слици. Пошто балван лежи на ваљцима, моменти сила реакције у тачкама додира балвана и ваљака и момент тежине балвана се сабирају у нулу. Ако рачунамо моменте у односу на крај балвана ближи ваљку 1, добијамо услов $x_1 \cdot N_1 + x_2 \cdot N_2 - \frac{L}{2} \cdot Mg = 0$. Услов равнотеже вертикалних сила даје $N_1 + N_2 = Mg$. У овим условима M је маса балвана, а g убрзање силе теже. Из оба услова и везе $x_2 = x_1 + D$, добијамо интензитете сила реакција у зависности од координате x_1 којом описујемо положаја балвана на ваљцима: $N_1 = Mg\left(1 - \frac{L}{2D} + \frac{x_1}{D}\right)$ и $N_2 = Mg\left(\frac{L}{2D} - \frac{x_1}{D}\right)$. Да балван не би пао, силе реакције морају деловати на балван навише и балван се мора ослањати на оба ваљка, то јест $N_1 \geq 0$, $N_2 \geq 0$, $x_1 \geq 0$ и $x_2 \leq L$. **5п**

   Преостали услов је равнотежа сила трења које делују дуж осе балвана. Узимајући у обзир смерове ротација ваљака, силе трења које делују дуж балвана су $F_1 = \mu_1 N_1 s_1$ и $F_2 = \mu_2 N_2 s_2$ уз позитиван смер од ваљка 1 ка ваљку 2. Дефиниција $s_{1,2} = \pm 1$ за смер ротација ваљака уз и насупрот смера казаљке на сату је као у тексту задатка. Користећи раније резултате, укупна сила дуж балвана је $F(x_1) = F_1 + F_2 = Mg\left[\mu_1 s_1 + \frac{L}{2D}\left(-\mu_1 s_1 + \mu_2 s_2\right) + \frac{x_1}{D}\left(\mu_1 s_1 - \mu_2 s_2\right)\right]$, а услов равнотеже је $F(x_e) = 0$ у неком равнотежном положају $x_1 = x_e$. Када је $\mu_1 s_1 \neq \mu_2 s_2$, положај равнотеже је дат са $\frac{x_{1e}}{D} = \frac{L}{2D} - \frac{\mu_1 s_1}{\mu_1 s_1 - \mu_2 s_2}$. Директном провером, равнотежни положај не постоји када је $\mu_1 s_1 = \mu_2 s_2$, осим када је трење нула, $\mu_1 = \mu_2 = 0$. Заменом добијеног положаја равнотеже у раније изведене услове да балван не падне са ваљака добијамо да равнотежа постоји ако важи $\frac{\mu_1 s_1}{\mu_1 s_1 - \mu_2 s_2} \leq \frac{L}{2D}$, $\frac{-\mu_2 s_2}{\mu_1 s_1 - \mu_2 s_2} \leq \frac{L}{2D}$, $\frac{\mu_2 s_2}{\mu_1 s_1 - \mu_2 s_2} \leq 0 \leq \frac{\mu_1 s_1}{\mu_1 s_1 - \mu_2 s_2}$ и $\mu_1 s_1 \neq \mu_2 s_2$. Описно, да би формално израчунат равнотежни положај постојао ваљци се морају окретати у супротним смеровима и балван мора бити довољно дужи од растојања између ваљака да не би пао са њих у равнотежном положају. **5п**

   Изведимо балван из равнотежног положаја, $x_1 = x_{1e} + \delta$. Убрзање дуж осе ће тада бити $a_x = \frac{F(x_{1e}+\delta)}{M}$. Заменом добијеног резултата за x_{1e}, добијамо $a_x = \frac{g}{D}\left(\mu_1 s_1 - \mu_2 s_2\right)\delta$. Пошто позитивно δ одговара кретању балвана у негативном смеру дуж осе x, равнотежа је стабилна ако је $\mu_1 s_1 - \mu_2 s_2 > 0$. Тада је угаона фреквенца осцилација $\omega = \sqrt{\frac{g}{D}\left(\mu_1 s_1 - \mu_2 s_2\right)}$. Када стабилна равнотежа постоји, овај израз се своди на $\omega = \sqrt{\frac{g}{D}\left(\mu_1 + \mu_2\right)}$. Осцилације су могуће само када се ваљак 1 окреће у смеру казаљке на сату, а ваљак 2 у супротном. Због линеарности сила, осцилације су хармонијске и за велико δ. **10п**



Слика уз решење задатка 1.

2. Укупна кинтетичка енергија коју Милан има на почетку скока се састоји од енергија транслационих кретања дуж хоризонталне, x, осе и вертикалне, y, осе, те од кинетичке енергије ротације. Њихов збир износи $E_{total} = \frac{m(v_x^2+v_y^2)}{2} + \frac{I\omega^2}{2}$. Како Милан у ваздуху проведе једнако време током сваког скока, вертикална компонента његове брзине на почетку скока је увек једнака, па се и део кинетичке енергије који одговара вертикалном кретању не мења од скока до скока. Тако за сваки скок важи $\frac{mv_i^2}{2} + \frac{I\omega_i^2}{2} = E = const$, где v_i одговара x компоненти брзине, а ω_i средњој угаоној брзини приликом скока са $i + \frac{1}{2}$ ротација. **6п** Тако је $\omega_i = \frac{(2i+1)\pi}{t}$, односно нумерички $\omega_1 \approx 11{,}78\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$, $\omega_2 \approx 19{,}635\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$ и $\omega_3 \approx 27{,}49\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$. Преписивањем једначине за енергију као $\epsilon - \omega_i^2\kappa = v_i^2$, где су $\epsilon = \frac{2E}{m}$ и $\kappa = \frac{I}{m}$, те решавањем било ког пара једначина по κ и ϵ добија се $\epsilon \approx 42\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}}$ и $\kappa \approx 0{,}0437\,\mathrm{m}^2$. Ако би Милан при четвороструком скоку провео једнако време у ваздуху као при осталим скоковима, његова средња угаона брзина би морала бити $\omega_4 \approx 35{,}343\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$. Заменом ове угаоне брзине у петходно добијену једначину за енергију, добијамо квадрат хоризонталне компоненте почетне брзине у могућем четвороструком скоку, $v_4^2 = \epsilon - \omega_4^2\kappa \approx -12{,}63\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} \leq 0$. Негативни квадрат брзине је нефизички, те долазимо до закључка да Милан нема довољно енергије за четвороструки скок. Могуће опције су тренинзи којима би повећао укупну расположиву енергију, смањио масу и смањио момент инерције. **14п**

3. (а) Код десног кружно поларисаног таласа квадрат интензитета електричног поља у фиксној равни је $E_{2x}^2 + E_{2y}^2 = E_{20}^2\left(\cos^2\Psi + \sin^2\Psi\right)$, где је $\Psi = k_2 z - \omega_2 t + \phi_2$. То је једначина кружнице $E_{2x}^2 + E_{2y}^2 = E_{20}^2$, са $(E_x, E_y) = E_{20}(\cos\Psi, \sin\Psi)$. Када фиксирамо вредност координате z, вредност параметра Ψ се смањује са протоком времена због члана $-\omega t$. Дакле, електрично поље ротира у негативном смеру у равни $x - y$. Користећи $\sin(-x) = -\sin x$, видимо да се R талас заменом $t \to -t$ преводи у L талас. Променом смера времена, смер обиласка контуре се мења а сама контура остаје иста, јер поново важи $E_x^2 + E_y^2 = E_{10}^2$. **6п**

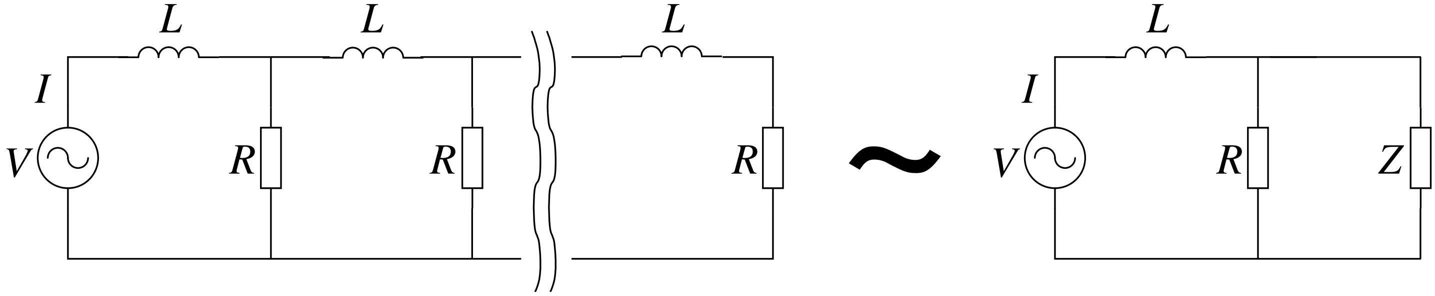
   (б) Суперпозицијом компоненти електричних поља дуж x и y осе добијамо $E_x = E_{1x} + E_{2x}$, $E_y = E_{1y} + E_{2y}$. Користићемо нотацију $k_1 = k_2 = k$, $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, $\phi_1 = \phi_2 = \phi$. Збирови су $E_x = (E_{10} + E_{20})\cos(kz - \omega t + \phi)$ и $E_y = (-E_{10} + E_{20})\sin(kz - \omega t + \phi)$. Елиминацијом временске променљиве из ових једначина, увођењем семене $\Psi = kz - \omega t + \phi$, и коришћењем идентитета $\sin^2\Psi + \cos^2\Psi = 1$, се добија $\frac{E_x^2}{(E_{10}+E_{20})^2} + \frac{E_y^2}{(-E_{10}+E_{20})^2} = 1$. Како је ово једначина елипсе, у питању је елиптична поларизација. **8п**

   (в) Суперпозицијом компоненти електромагнетних таласа дуж x и y осе добијамо $E_x = E_{1x} + E_{2x}$ и $E_y = E_{1y} + E_{2y}$, као у делу (б). Сада користимо $E_{10} = E_{20} = E_0$, $k_1 = k_2 = k$, $\omega_1 = \omega_2 = \omega$. Уз коришћење одговарајућих тригонометријских идентита се добија $E_x = 2E_0\cos\frac{\phi_1-\phi_2}{2}\cos\left(kz - \omega t + \frac{\phi_1+\phi_2}{2}\right)$ и $E_y = -2E_0\sin\frac{\phi_1-\phi_2}{2}\cos\left(kz - \omega t + \frac{\phi_1+\phi_2}{2}\right)$. Дељењем ових двеју једначина, добија се $\frac{E_y}{E_x} = \tan\frac{\phi_2-\phi_1}{2}$. Како је ово једначина праве, резултат суперпозиције дата два електромагнетна таласа је линеарно поларисан талас. **6п**

4. Решићемо проблем користећи комплексне импедансе. За све величине подразумевамо хармонијску временску зависност, а апсолутна вредност и фаза комплексних бројева описује амплитуде и фазе одговарајућих величина.

   (а) Негативан и реалан отпор значи да је фазна разлика између струје и напона у том елементу кола π. У том случају напон на елементу и струја кроз елемент имају супротне знаке, пошто је $i(t)u(t) \propto \cos(\omega t + \phi + \pi)\cos(\omega t + \phi)$. Пошто је $\cos(x+\pi) = -\cos x$, добијамо $i(t)u(t) \propto -\cos^2(\omega t + \phi)$ и производ тренутне струје и тренутног напона на елементу је увек негативан. Како је овај производ једнак дисипацији енергије на елементу кола, такав елемент би додавао енергију у коло и нарушавао одржање енергије. Према томе, импедансе елемената кола који не додају енергију у коло морају имати позитивне реалне делове. $\boxed{\textbf{6п}}$

   (б) Бесконачну леству можемо поделити на једну грану са завојницом, једну грану са отпорником и бесконачни остатак кола идентичан почетном колу. У новом колу, обележимо импедансу бесконачног дела са Z, као на приложеној слици. Поставимо једначину која тврди да су импедансе почетног неподељњног кола и његове подељене верзије једнаке. Из правила слагања импеданси добијамо $Z = i\omega L + \frac{RZ}{R+Z}$, где је $i\omega L$ импеданса завојнице на угаоној фреквенци ω, а R импеданса отпорника. Сређивањем добијамо квадратну једначину по Z, $Z^2 - i\omega L Z - i\omega L R = 0$ са решењима $Z_{1,2} = \frac{1}{2}\omega L\left(i \pm \sqrt{-1 + i\frac{4R}{\omega L}}\right)$. $\boxed{\textbf{6п}}$ Два решења ће имати супротне знаке реалног дела, и треба изабрати оно са позивним, према резултату дела (а). Директним рачуном $\sqrt{-1 + i\frac{4R}{\omega L}} = \sqrt[4]{1 + \frac{16R^2}{\omega^2 L^2}}\mathrm{e}^{i\frac{\phi_z}{2}}$, где је $\tan\phi_z = -\frac{\omega L}{4R}$ и угао лежи у интервалу $\frac{\pi}{2} < \phi_z < \pi$. Заменом бројних вредности добијамо $\frac{\phi_z}{2} = 1.21\,\mathrm{rad}$ за фазу и $Z = (160 + 670i)\ \Omega$. Апсолутна вредност импедансе је $|Z| = 690\,\Omega$ а амплитуда струје је $I = \frac{V}{|Z|} = 1{,}5\,\mathrm{mA}$. $\boxed{\textbf{8п}}$



Слика уз решење задатка 4.

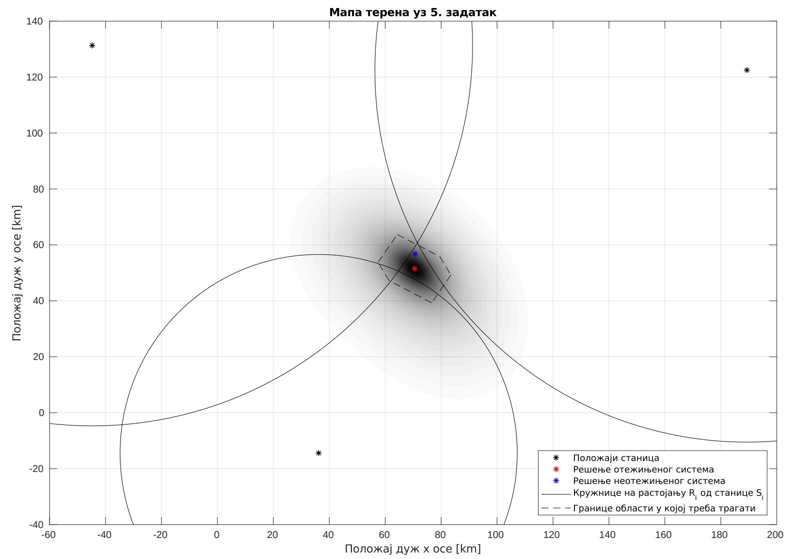
5. Уз помоћ приложене мапе се може, на основу уцртаних кружница, одредити у ком ’ сектору ’ је метеорит завршио. Да се све три кружнице секу, смислено би било тражити метеорит у троуглу између тачака пресека. Пошто се кружнице не секу, највероватније место пада је у области где су кружнице најближе. Координате центра сектора који обухвата ову област су $x_c^{'} = 70\,\mathrm{km}$ $y_c^{'} = 50\,\mathrm{km}$. Према предлогу у задатку, центар овог сектора је нови координатни почетак са новим координатама $x_c = 0$ и $y_c = 0$. $\boxed{\textbf{4п}}$

   Расписивањем једначине $R_i^2 = (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2$ добија се $2x_i x - x^2 + 2y_i y - y^2 = x_i^2 + y_i^2 - R_i^2$. Уколико је $|2xx_i| \gg x^2$, као и $|2yy_i| \gg y^2$, чланови x^2 и y^2 се могу занемарити и тиме се систем једначина линеаризује. Да би то било задовољено мора вредети $|x_i| \gg y$ и $|y_i| \gg y$ што добија приближним постављањем тачке $(x{,}y)$ у близину координатног почетка. На основу претходног дела решења, знамо да смо ово урадили постављањем центра највероватнијег сектора пада у координатни почетак. $\boxed{\textbf{4п}}$

   Читањем коефицијената уз x, y и слободног члана, у нотацији дефинисаној у тексту задатка, имамо $a_i = 2x_i$, $b_i = 2y_i$ и $c_i = x_i^2 + y_i^2 - R_i^2$. Вредности ових коефицијената, заједно са w_i, налазе се у приложеној табели. $\boxed{\textbf{4п}}$

   Заменом у формуле из поставке задатка имамо: $A = \sum_{i=1}^{3} a_i^2 w_i = 0{,}0165\mathrm{km}^{-2}$, $E = \sum_{i=1}^{3} b_i^2 w_i = 0{,}0183\mathrm{km}^{-2}$, $B = D = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i w_i = 0{,}0081\mathrm{km}^{-2}$, $C = \sum_{i=1}^{3} a_i c_i w_i = 0{,}02\mathrm{km}^{-1}$ и $F = \sum_{i=1}^{3} b_i c_i w_i = 0{,}0316\mathrm{km}^{-1}$. Решавањем овог система добија се $x = 0{,}46\mathrm{km}$ и $y = 1{,}52\mathrm{km}$, односно у старим координатама $x = 70{,}46\mathrm{km}$ и $y = 51{,}52\mathrm{km}$, уцртано на мапи. $\boxed{\textbf{8п}}$

Станица	x_i[km]	y_i[km]	R[km]	ΔR[km]	a_i[km]	b_i[km]	c_i[km^2]	w_i[km^{-4}]
S_1	-33,79	-64,42	71	8	-67,58	-128,84	250,75	7,75e-7
S_2	-114,77	81,31	136	12	-229,54	162,62	1287,47	9,39e-8
S_3	119,32	72,50	133	10	238,64	145	1804,51	1,4e-7



Поређења ради, приложена мапа садржи уцртану и тачку која је решење неотежињеног система која видно одступа од решења отежињеног система. Уцртана 'осенченост' је пропорционална отежињеном одступању од решења нелинеарног система, те видимо да је апроксимација занемаривања квадратних чланова била оправдана у овом случају.

Задатке припремили: ***др Владан Павловић***, Природно-математички факултет, Ниш
Марко Кузмановић, Universite Paris-Sud, France
Илија Иванишевић, Институт за физику, Београд
Рецензент: ***др Димитрије Степаненко***, Институт за физику, Београд
Председник Комисије за такмичења средњих школа: ***др Божидар Николић***, Физички факултет, Београд