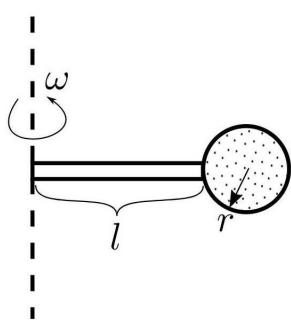


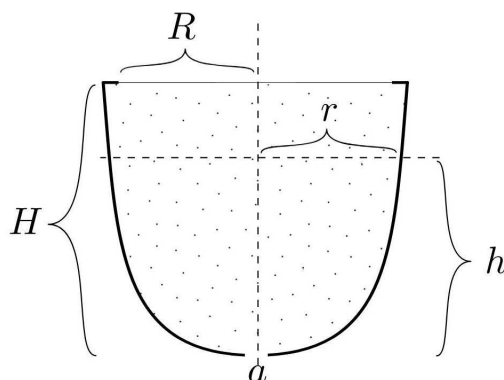


II разред

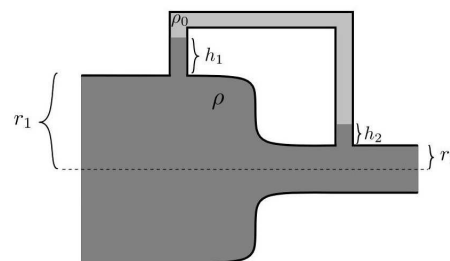
- Идеалан двоатомски гас моларне масе $M = 29 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$ се налази у термално изолованој сфери полупречника $r = 5 \text{ cm}$ која је преко крутог штапа дужине $l = 4r$ повезана са осовином око које може да ротира (слика 1).
 - Израчунати I/n , момент инерције гаса у сфери у односу на осу ротације по јединици мола. Момент инерције кугле око своје осе је $I = \frac{2}{5}mr^2$, а важи и $I = I_0 + md^2$, где је I_0 момент инерције тела око осе која пролази кроз његов центар масе, а I момент инерције око паралелне осе на растојању d .
 - Кугла заједно са штапом почиње да ротира брзином од $\omega = 30 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$. Ако се ротација нагло прекине и кугла заустави за колико ће се променити температура гаса? Вредност универзалне гасне константе износи $R = 8.314 \frac{\text{J}}{\text{molK}}$. (20 поена)
- Дат је топлоотно изоловани суд у свемирском вакууму далеко од извора топлоте, унутар кога је гас неон моларне масе $M = 20 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$ при температури од $T = 500 \text{ K}$. На суду је направљен мали отвор, који је ипак већи од дужине средњег слободног пута неона. Наћи брзину истицања неона кроз овај отвор. Бернулијева једначина за компресибилне флуиде (укључујући и гасове) у одсуству гравитације гласи $\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + u + q_d = \text{const.}$ где је u унутршња енергија флуида по јединици масе, а q_d изгубљена (дисипована) топлота по јединици масе. $R = 8.314 \frac{\text{J}}{\text{molK}}$. (20 поена)
- Две области једнаких запремина раздвојене су полупропустљивом мембраном. Мембрана пропушта само натријумове јоне, а калијумове јоне не пропушта. У почетном тренутку, у једној области је смеша натријумових и калијумових јона, а у другој нема ни једних ни других. Када почне мешање, натријумови јони продиру у другу област и притисак јона у првој опадне за 13%. Температура се може сматрати константном при целом процесу. Моларна маса натријума је $M_1 = 23 \text{ g/mol}$, а калијума $M_2 = 39 \text{ g/mol}$.
 - Наћи однос маса натријума и калијума у почетној смеси.
 - Формула за средњи слободни пут јона је $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}n_0\sigma}$, где је σ попречан пресек и n_0 укупан број јона у смеси по јединици запремине. Међутим, када имамо мешавину два гаса онда за i -ти јон ($i = 1, 2$) треба узети ефективни попречни пресек σ_i за који важи $\frac{1}{\sigma_i} = \frac{1}{\sigma_{ii}} + \frac{1}{\sigma_{ij}}$ ($j = 3 - i$), при чему је $\sigma_{ii} = \pi(2r_i)^2$ и $\sigma_{ij} = \pi(r_i + r_j)^2$, где су r_i и r_j полупречници i -тог и j -тог јона. Наћи однос средњих слободних путева натријума и калијума у почетној смеси. Полупречници јона натријума и калијума су $r_1 = 116 \text{ pm}$ и $r_2 = 162 \text{ pm}$ респективно. (20 поена)
- Дат је цилиндрични суд висине H и полупречника при врху R (слика 2). У дну суда је избушен мали отвор површине a . Полупречник суда се мења у зависност висине тако да је брзина спуштања нивоа течности у суду константна. Сматрати да је квадрат брзине спуштања нивоа воде много мањи од квадрата брзине истицања воде из отвора.
 - Наћи $r(h)$, зависност полупречника суда r од висине у односу на отвор h .
 - Наћи време T потребно да сва вода истекне из суда. (20 поена)
- Дата је хоризонтална цев кроз коју протиче течност густине ρ , као на слици 3. У првом делу је полупречник r_1 , а у другом r_2 . Два дела спаја мала цев у којој се налази течност густине ρ_0 . Висине докле допире течност густине ρ унутар првог и другог дела мале цеви су респективно h_1 и h_2 . Наћи v_1 , брзину којом течност протиче у првом делу цеви. (20 поена)



Слика 1



Слика 2

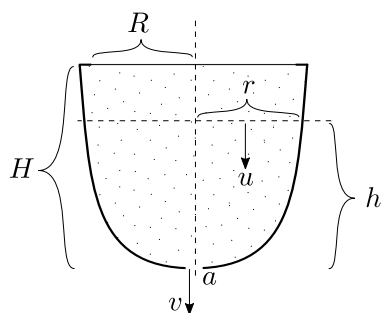


Слика 3

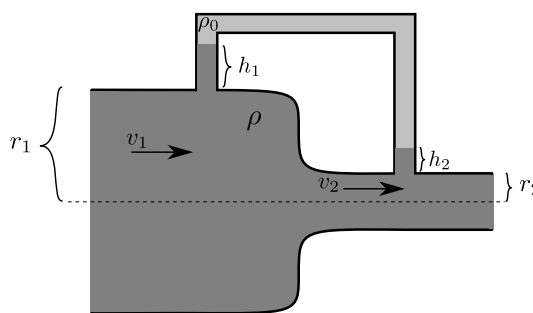
II разред

1. (а) Момент инерције сфере је $I_0 = nM\frac{2}{5}r^2$ [3 п]. Применом Штајнерове теореме добијамо $I = I_0 + 5nMr^2 = nM\frac{127}{5}r^2$ [3 п], те је $\frac{I}{n} = M\frac{127}{5}r^2 = 1.84 \cdot 10^{-3} \frac{\text{kgm}^2}{\text{mol}}$ [2 п].
- (б) Унутрашња енергија идеалног гаса је $U = nC_vT = n\frac{R}{\gamma-1}T$ [3 п] где смо искористили чињеницу да је $C_v = \frac{R}{\gamma-1}$. Применом закона одржања енергија на гас који ротира и који је заустављен имамо $U_i + \frac{I\omega^2}{2} = U_f$ [4 п] тј. $\Delta U = \frac{I\omega^2}{2}$ где смо гас посматрали као ротирајућу сферу. Одавде следи да је промена температуре $\Delta T = \frac{I\omega^2(\gamma-1)}{2nR}$ [3 п]. За коначан израз имамо $\Delta T = \frac{127Mr^2\omega^2(\gamma-1)}{10R} = 0.04 \text{ K}$ [2 п].
2. Како се неон налази у термално изолованом суду, следи да је $q_d = 0$ [2 п]. Унутар суда унутрашња енергија неона је $u_1 = \frac{C_vT}{M} = \frac{RT}{M(\gamma-1)}$ [3 п] и једначина стања $p_1 = \frac{RT\rho}{M}$ [3 п]. Брзина неона у суду је занемарљива, тј. $v_1 = 0$, јер се молекули неона крећу у свим правцима [2 п]. Уз отвор изван суда имамо да је $p_2 = 0$ [2 п] и $u_2 = 0$ [2 п]. Ако је брзина гаса ван суда $v = v_2$ применом Бернулијеве једначине са леве и десне стране отвора имамо $\frac{p_1}{\rho} + u_1 = \frac{v_2^2}{2}$ [4 п]. Убацавањем формула за u_1 и p_1 добијамо: $\frac{p_1}{\rho} + u_1 = \frac{RT}{M} + \frac{RT}{M(\gamma-1)} = \frac{\gamma RT}{M(\gamma-1)}$, те одавде следи да је брзина којом неон истиче из суда $v = \sqrt{\frac{2\gamma RT}{M(\gamma-1)}} = 1.019 \frac{\text{km}}{\text{s}}$ [2 п].
3. (а) Систем ће бити у равнотежи када се притисци натријумових јона у обе области изједначе [1 п]. Пошто су запремине и температуре једнаке, то значи да ће половина натријумових јона продрети у другу област [1 п]. На почетку процеса, једначина стања у првој области гласи $pV = (m_1/M_1 + m_2/M_2)RT$ [3 п]. На крају транспорта, у првој области имамо $p_1V = (m_1/(2M_1) + m_2/M_2)RT$ [3 п], при чему је $p_1 = kp$ и $k = 1 - 0.13 = 0.87$ [1 п]. Поделивши другу једначину првом, имамо $k = (m_1/(2M_1) + m_2/M_2) / (m_1/M_1 + m_2/M_2)$ [2 п] што даје $m_1/m_2 = \frac{(2-2k)M_1}{(2k-1)M_2}$ [1 п]. Заменом бројева добијамо $m_1/m_2 = 0.207$ [2 п].
- (б) Имамо $\frac{1}{\sigma_1} = \frac{1}{\sigma_{11}} + \frac{1}{\sigma_{12}} = \frac{4r_1^2 + (r_1 + r_2)^2}{4\pi r_1^2(r_1 + r_2)^2}$ и слично $\frac{1}{\sigma_2} = \frac{4r_2^2 + (r_1 + r_2)^2}{4\pi r_2^2(r_1 + r_2)^2}$ [3 п] те имамо да је однос средњих слободних путева једнак $\frac{l_1}{l_2} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{(4r_1^2 + (r_1 + r_2)^2)r_2^2}{(4r_2^2 + (r_1 + r_2)^2)r_1^2} = 1.4$ [3 п].
4. (а) Нека је брзина спуштања нивоа u , а брзина истицања v (слика 1). Из Бернулијеве једначине имамо $\rho gh = \frac{\rho v^2}{2}$ [3 п], тј. $v = \sqrt{2gh}$ [2 п] (занемаримо члан $\frac{\rho u^2}{2}$). Из једначине континуитета добијамо $u\pi r^2 = v a$ [3 п] тј. $u = \frac{\sqrt{2gh}a}{\pi r^2}$. Пошто је u константно следи $u = \frac{\sqrt{2gHa}}{R^2\pi}$ [3 п] те следи $\frac{\sqrt{h}}{r^2} = \frac{\sqrt{H}}{R^2}$ тј. $r(h) = R\sqrt{\frac{h}{H}}$ [4 п].
- (б) Пошто је брзина спуштања нивоа константна, следи да је $T = \frac{H}{u} = \sqrt{\frac{H}{2g}} \frac{\pi R^2}{a}$ [5 п].
5. Нека је брзина кроз другу цев v_2 (слика 2). Услед једначине континуитета имамо $v_1 r_1^2 = v_2 r_2^2$ [4 п]. Бернулијева једначина гласи $p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2}$ [4 п]. Нека је притисак на нивоу p_0 . Тада имамо у првој цеви $p_1 = p_0 + g\rho(h_1 + r_1)$ [3 п], а у другој цеви $p_2 = p_0 + g\rho_0(h_1 + r_1 - h_2 - r_2) + g\rho(h_2 + r_2)$ [3 п]. Кад комбинујемо све једначине добијамо: $p_0 + g\rho(h_1 + r_1) + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_0 + g\rho_0(h_1 + r_1 - h_2 - r_2) + g\rho(h_2 + r_2) + \frac{\rho v_1^2 r_1^4}{2r_2^4}$ [3 п] те следи $v_1 = \sqrt{\frac{2(\rho - \rho_0)g(h_1 + r_1 - h_2 - r_2)}{\rho\left(\frac{r_1^4}{r_2^4} - 1\right)}}$

[3 п].



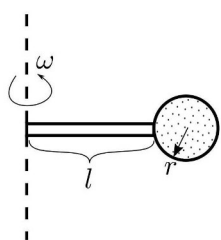
Слика 1



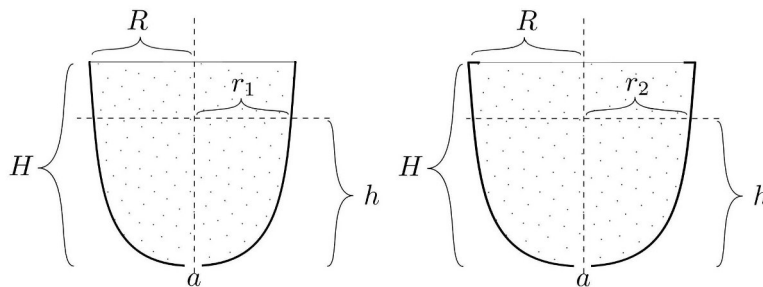
Слика 2

II разред

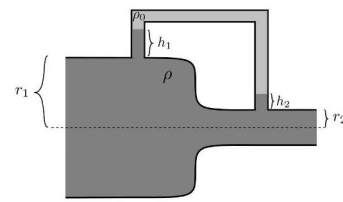
- Идеалан двоатомски гас моларне масе $M = 29 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$ се налази у термално изолованој сфери полупречника $r = 5 \text{ cm}$ која је преко крутог штапа дужине $l = 4r$ повезана са осовином око које може да ротира (слика 1).
 - Израчунати I/n , момент инерције гаса у сфери у односу на осу ротације по јединици мола. Момент инерције кугле око своје осе је $I = \frac{2}{5}mr^2$, а важи и $I = I_0 + md^2$, где је I_0 момент инерције тела око осе која пролази кроз његов центар масе, а I момент инерције око паралелне осе на растојању d .
 - Кугла заједно са штапом почиње да ротира брзином од $\omega = 30 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$. Ако се ротација нагло прекине и кугла заустави, за колико ће се променити температура гаса? $R = 8.314 \frac{\text{J}}{\text{molK}}$. (20 поена)
- Освеживач се налази у аеросол конзерви под притиском од $p_1 = 4 \text{ atm}$ и на атмосферској температури $T = 300\text{K}$. По хемијском саставу, то је сложени органски молекул моларне масе $M = 500 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$ за који се може претпоставити да је једнодимензионалан. Притиском на механизам за истискивање омогућујемо истискивање освеживача из конзерве кроз мали отвор полупречника $r = 0.4\text{mm}$. Цео процес се брзо одвија. Соба је на нормалном атмосферском притиску.
 - Наћи T_1 , температуру освеживача након изласка из конзерве.
 - Наћи v , брзину којом излази освеживач бочице и m , масу освеживача који изађе из конзерве приликом притиска у трајању од $t = 1 \text{ s}$. Занемарити брзину освеживача унутар конзерве. $R = 8.314 \frac{\text{J}}{\text{molK}}$. Бернулијева једначина за компресибилне флуиде, што укључује и гасове, гласи $pV + U + E_k = \text{const}$. (20 поена)
- У овом задатку ћемо проценити време потребно да се освеживач ваздуха осети на другом крају просторије.
 - Нека је $m = 5 \text{ mg}$ освеживача у једном крају просторије при занемарљиво малој (групној) брзини. Претпоставимо да се освеживач дифузијом шири кроз просторију. Пречник попречног пресека молекула освеживача износи $d = 1580\text{pm}$ и моларна маса $M = 500 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$. Можемо сматрати да је температура освеживача једнака температури ваздуха у соби, $T = 300\text{K}$. Израчунати средњи слободни пут молекула освеживача, средњу брзину молекула освеживача и коефицијент дифузије. $R = 8.314 \frac{\text{J}}{\text{molK}}$.
 - Просторија је димензија $10 \times 4 \times 3$ метара, а освеживач је избачен код једног зида димензија 4×3 метра и дифундује у правцу паралелном дужини просторије ка супротном зиду димензија 4×3 метра. Најгрубља апроксимација је да се градијент концентрације $\frac{\Delta n}{\Delta x}$, тј. промена концентрације по јединици дужине освеживача дуж правца избачаја, може (у просеку) сматрати константним. Израчунати градијент концентрације.
 - Користећи Фиков закон, $\Delta m/\Delta t = -DS(\Delta n/\Delta x)$, проценити време потребно да се освеживач осети код супротног зида димензија 4×3 метра. Сматрати да се мирис може осетити ако 1% освеживача дође до супротног зида. (20 поена)
- Дата су два цилиндрично симетрична суда, оба висине H и полупречника при врху R , која су до врха напуњена водом (слика 2). У дну сваког суда је избушен мали отвор површине a . Полупречници судова се мењају у зависност висине. Брзина спуштања нивоа воде није занемарљива ни код једног од ова два суда.
 - Нека је брзина спуштања нивоа течности у првом суду константна. Наћи $r_1(h)$, зависност полупречника првог суда r_1 од h , висине у односу на отвор.
 - Нека је брзина истицања воде из другог суда константна. Наћи $r_2(h)$, зависност полупречника другог суда r_2 од h , висине у односу на отвор. (20 поена)
- Дата је хоризонтална цев кроз коју протиче течност густине ρ , као на слици 3. У првом делу је полупречник r_1 , а у другом r_2 . Два дела спаја мала цев у којој се налази течност густине ρ_0 . Висине докле допире течност густине ρ унутар првог и другог дела мале цеви су респективно h_1 и h_2 . Наћи v_1 , брзину којом течност протиче у првом делу цеви. (20 поена)



Слика 1



Слика 2



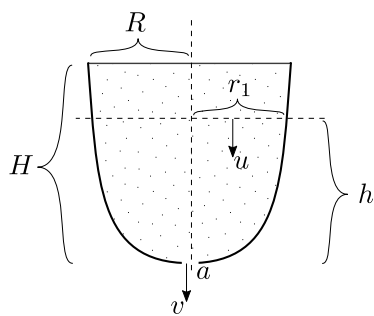
Слика 3



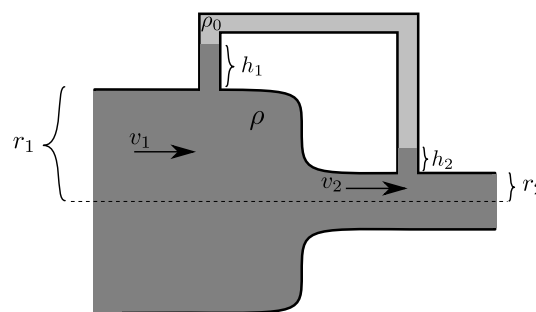
II разред

1. (a) Момент инерције сфере је $I_0 = nM\frac{2}{5}r^2$ [3 п]. Применом Штајнерове теореме добијамо $I = I_0 + 5nMr^2 = nM\frac{127}{5}r^2$ [3 п], те је $\frac{I}{n} = M\frac{127}{5}r^2 = 1.84 \cdot 10^{-3} \frac{\text{kgm}^2}{\text{mol}}$ [2 п].
- (б) Унутрашња енергија идеалног гаса је $U = nC_vT = n\frac{R}{\gamma-1}T$ [3 п] где смо искористили чињеницу да је $C_v = \frac{R}{\gamma-1}$. Применом закона одржања енергија на гас који ротира и који је заустављен имамо $U_i + \frac{I\omega^2}{2} = U_f$ [4 п] тј. $\Delta U = \frac{I\omega^2}{2}$ где смо гас посматрали као ротирајућу сферу. Одавде следи да је промена температуре $\Delta T = \frac{I\omega^2(\gamma-1)}{2nR}$ [3 п]. За коначан израз имамо $\Delta T = \frac{127Mr^2\omega^2(\gamma-1)}{10R} = 0.04 \text{ K}$ [2 п].
2. (a) Пошто је гас (освеживач) једнодимензионалан, следи да има три степена слободе трансляције и два ротације те је $j = 3 + 2 = 5$ [2 п], $\gamma = \frac{j+2}{j} = \frac{7}{5}$ и $C_p = \frac{(j+2)R}{2} = \frac{7R}{2}$ [1 п]. Имамо $p_1 = 4 \text{ atm}$, $p_2 = 1 \text{ atm}$ и $T_1 = T = 300 \text{ K}$. Пошто се процес истицања гаса брзо одвија следи да је адијабатски те важи $T_2/T_1 = (p_1/p_2)^{(1-\gamma)/\gamma}$ [3 п], тј. $T_2 = T_1(p_1/p_2)^{(1-\gamma)/\gamma} = 201.9 \text{ K}$ [2 п]. (Опасно хладно!)
- (б) На истицање гаса се може применити Бернулијева теорема: $p_1V_1 + nC_vT_1 = p_2V_2 + nC_vT_2 + nMv^2/2$ [4 п]. Једначине стања дају $p_1V_1 - p_2V_2 = nR(T_1 - T_2)$ [2 п], те убацујући израз у прву једначину добијамо $nMv^2/2 = nC_p(T_1 - T_2)$ ($C_p = C_v + R$) тј. $v = \sqrt{\frac{2C_pT_1}{M}(1 - (p_1/p_2)^{(1-\gamma)/\gamma})} = 106.9 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ [3 п]. Маса освеживача која се избаци у интервалу дужине $t = 1 \text{ s}$ износи $m = cM\pi r^2vt \text{ mg}$ где је $c = p_2/RT_2$ па је $m = 1.62 \text{ g}$ [3 п].
3. (a) Средњи слободни пут освеживача износи $\lambda = RT/(\sqrt{2}\pi N_A d^2 p_a)$ [1 п], а коефицијент дифузије је $D = \lambda \langle v \rangle / 3$, тј. $D = 2/3 \times \sqrt{R^3/MN_A^2\pi^3} \times T_2^{3/2}/(p_a d^2)$ [2 п]. Ово даје $\lambda = 3.69 \text{ nm}$ и $D = 1.39 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$ [2 п]. Средња брзина је дата са $\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$ [1 п], тј. $\langle v \rangle = 112.8 \text{ m/s}$ [1 п].
- (б) Средња концентрације у соби је $n = m/(MV) = m/(Ma_1a_2a_3)$, где су a_1, a_2, a_3 димензије собе [1 п]. Ако је градијент концентрације константан, онда се концентрација креће од $n_{\text{max}} = 2n = 2m/(Ma_1a_2a_3)$, на једном крају собе, до 0, на другом крају, а $\Delta n/\Delta x = (n_{\text{max}} - n_{\text{min}})/a_1 = 2m/(Ma_1^2a_2a_3)$ [5 п], па је $\Delta n/\Delta x = 1.67 \times 10^{-8} \text{ mol/m}^4$ [1 п].
- (в) Имамо $qm/T = DM(\Delta n/\Delta x)S$ [4 п] па је $T = qm/(DM(\Delta n/\Delta x)S) = 3.59 \times 10^6 \text{ s}$ [2 п].
4. (a) Нека је u брзина спуштања нивоа воде, а v брзина истицања воде кроз отвор (слика 1). У оба дела задатка ћемо ради једноставности користити r као израз за радијус ћупа до коначног решења. Имамо једначину континуитета $r^2\pi u = av$ [3 п] и Бернулијеву једначину $\frac{\rho v^2}{2} + \rho gh = \frac{\rho u^2}{2}$ [3 п]. Пошто је u константно следи $v = \frac{r^2\pi u}{a}$ [2 п]. Убацавањем израза у Бернулијеву једначину добијамо $\frac{\rho u^2}{2}(\frac{r^4\pi^2}{a^2} - 1) = \rho gh$ [1 п], тј. следи да је израз $\frac{1}{h}(\frac{r^4\pi^2}{a^2} - 1)$ константан, те важи $\frac{1}{h}(\frac{r^4\pi^2}{a^2} - 1) = \frac{1}{H}(\frac{\pi^2 R^4}{a^2} - 1)$ [2 п]. Решавањем по r добијамо $r_1(h) = r = \sqrt[4]{\frac{a^2}{\pi^2} + \frac{h}{H}(R^4 - \frac{a^2}{\pi^2})}$ [2 п].
- (б) У овом случају пошто је v константно имамо $u = \frac{av}{r^2\pi}$ [2 п] те убацавањем израза у Бернулијеву једначину добијамо $\frac{\rho v^2}{2}(\frac{a^2}{r^4\pi^2} - 1) = \rho gh$ [1 п], тј. следи да је израз $\frac{1}{h}(\frac{a^2}{r^4\pi^2} - 1)$ константан, те важи $\frac{1}{h}(\frac{a^2}{r^4\pi^2} - 1) = \frac{1}{H}(\frac{a^2}{R^4\pi^2} - 1)$ [2 п]. Решавањем по r добијамо $r_2(h) = r = \sqrt[4]{\frac{a^2}{\pi^2(1 + \frac{h}{H}(\frac{a^2}{\pi^2 R^4} - 1))}}$ [2 п].
5. Нека је брзина кроз другу цев v_2 (слика 2). Услед једначине континуитета имамо $v_1r_1^2 = v_2r_2^2$ [4 п]. Бернулијева једначина гласи $p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2}$ [4 п]. Нека је притисак на нивоу p_0 . Тада имамо у првој цеви $p_1 = p_0 + g\rho_0(h_2 + r_2 - h_1 - r_1) + g\rho(h_1 + r_1)$ [3 п], а у другој цеви $p_2 = p_0 + g\rho_0(h_1 + r_1 - h_2 - r_2) + g\rho(h_2 + r_2)$ [3 п]. Кад комбинујемо све једначине добијамо: $p_0 + g\rho(h_1 + r_1) + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_0 + g\rho(h_2 + r_2) + \frac{\rho v_2^2}{2}$ [3 п] те следи $v_1 = \sqrt{\frac{2(\rho - \rho_0)g(h_1 + r_1 - h_2 - r_2)}{\rho(\frac{r_1^4}{r_2^4} - 1)}}$

[3 п]



Слика 1



Слика 2