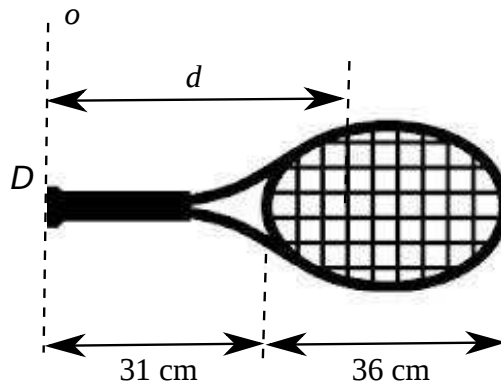




Задатак 1: Тенис (10 поена)

Тенис је спорт који је настао у 19. веку у Енглеској. У тенису играчи користе рекет којим ударају лоптицу са циљем да противник не успе да је врати. Притом се играчи труде или да лоптици саопште што већу брзину или што већу угаону брзину (спин). У првом случају противник нема довољно времена да стигне лоптицу, а у другом случају лоптица незгодно одскаче и противнику је тешко да је контролисано удари рекетом. У овом задатку размотрићемо услове који треба да буду испуњени да би тенисер лоптици саопштио велику брзину или велики спин.

Маса тениске лоптице је $m = 57 \text{ g}$, а момент инерције рекета у односу на осу o која се налази у равни рекета и пролази кроз крајњу тачку D дршке рекета (слика 1) је $I = 0,057 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. Сматрати да сви судари рекета и лоптице у овом задатку трају кратко, тако да је дејство силе гравитације током судара занемарљиво.



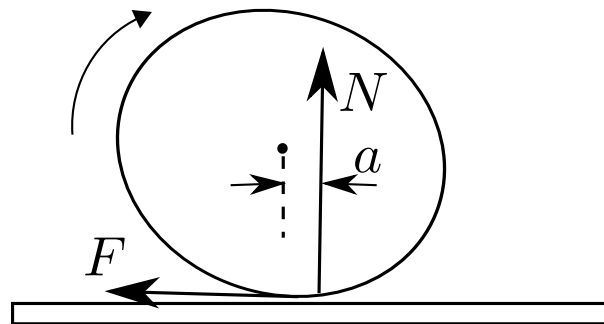
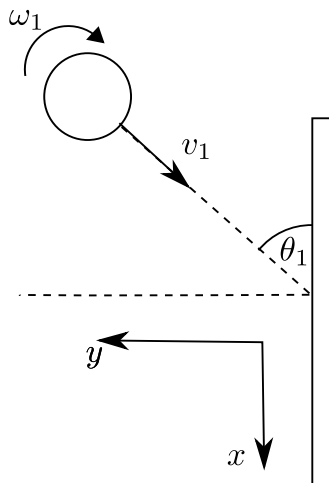
Слика 1: Шематски приказ рекета

- (а) Најпре ћемо размотрити како приликом сервиса тенисер треба да удари лоптицу да јој саопшти што већу брзину. Тенисер држи рекет у тачки D , тако да рекет може искључиво да врши ротацију око осе o . Сматрати да пре судара са лоптицом рекет ротира око осе o угаоном брзином ω , као и да лоптица пре судара са рекетом мирује и нема спин. Рекет удара лоптицу тачком на оси рекета која се налази на растојању d од тачке D (слика 1). Изразити брзину лоптице v након сервиса у зависности од ω , d , I и m . На основу тог израза и димензија и облика рекета одредити којим делом рекета треба да се удари лоптица тако да добије највећу могућу брзину, као и при ударцу којим делом рекета је та брзина најмања. У овом делу задатка сматрати да нема губитака енергије, односно да се почетна кинетичка енергија рекета искључиво размењује између рекета и лоптице. **(1,5 поена)**
- (б) Блок-ритерн је ударац у коме након противничког сервиса тенисер само постави рекет и врати лоптицу. Сматрати да лоптица која нема спин удара у рекет под правим углом у тачки на оси рекета која се налази на растојању d од тачке D (слика 1). Тенисер притом држи рекет у тачки D , тако да рекет може искључиво да врши ротацију око осе o . Коефицијент реституције e се у овом случају дефинише као однос интензитета брзине лоптице после и пре судара. Изразити e у функцији I , m



и d . На основу тог израза и димензија и облика рекета одредити којим делом рекета треба да се удари лоптица тако да добије највећу могућу брзину, као и при ударцу којим делом рекета је та брзина најмања. У овом делу задатка сматрати да нема губитака енергије, односно да се почетна кинетичка енергија лоптице искључиво размењује између рекета и лоптице. **(1,5 поена)**

Надаље ћемо у овом задатку разматрати судар лоптице са рекетом у случају кад лоптица има неки почетни спин (слика 2), са циљем да разумемо колики ће бити спин лоптице после судара. Кретање рекета пре судара је чисто транслационо. Једноставности ради, сматраћемо да судар лоптице са рекетом не доводи до ротационог кретања рекета, односно да лоптица удара у центар масе рекета. Појаву ћемо посматрати у инерцијалном референтном систему S у коме пре судара рекет мирује. Претпоставити такође да током судара лоптице и рекета рука тенисера не делује на рекет.



Слика 2: Судар лоптица-рекет

Слика 3: Котрљање без клизања лоптице по рекету

- (в) У зависности од параметара система, приликом судара лоптице са рекетом може доћи и до проклизавања лоптице по рекету и до котрљања (без проклизавања) лоптице по рекету. У овом делу задатка ћемо разматрати котрљање лоптице по рекету. Приликом котрљања се јавља сила трења котрљања која је по интензитету једнака $F = \mu_R N$, где је μ_R коефицијент трења котрљања, а N сила реакције рекета. Притом због деформације рекета и лоптице сила реакције рекета није усмерена ка центру лоптице, већ има момент $N \cdot a$ у односу на центар лоптице (слика 3). При ротацији у смеру назначеном на слици 3, сила F има смер назначен на истој слици, а сматрати да је њен момент у односу на центар лоптице по интензитету једнак $F \cdot R$, где је R полупречник лоптице. Изразити a у функцији R , μ_R , масе лоптице m и масе рекета M . Одредити бројну вредност a ако је $R = 32,5 \text{ mm}$, $\mu_R = 0,05$, $m = 57 \text{ g}$ и $M = 180 \text{ g}$. Момент инерције лоптице у односу на осу која пролази кроз центар лоптице је $I_L = \frac{2}{3}mR^2$. **(2 поена)**



- (г) Судар лоптице и рекета у реалности није потпуно еластичан, а део енергије се преноси на вибрацију рекета и унутрашњу енергију лоптице. Утицај губитака енергије се урачунава кроз коефицијент реституције који се у овом случају дефинише као $e = \frac{v_{2y} - V_{2y}}{-v_{1y}}$, где v_{1y} и v_{2y} представљају y -компоненте брзине лоптице пре и после судара, V_{2y} је y -компонента брзине рекета после судара (све ове брзине су дефинисане у систему S). Координатни систем је назначен на слици 2. Привидни коефицијент реституције се дефинише као $e_P = \frac{v_{2y}}{-v_{1y}}$. Изразити e_P у функцији e , m и M . Одредити бројну вредност e_P ако је $e = 0,9$, док M и m имају исте бројне вредности као у делу задатка (в). **(1 поен)**
- (д) Лоптица пада на рекет под упадним углом од $\theta_1 = 45^\circ$ брзином $v_1 = 30 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ (у референтном систему S , слика 2). Угаона брзина лоптице пре судара је $\omega_1 = 300 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ и усмерена је као на слици 2. Занемарити момент силе N током клизања лоптице по рекету и сматрати да током котрљања лоптице по рекету силе делују на начин који је описан у делу задатка под (в). Одредити како угаона брзина лоптице након судара ω_2 зависи од коефицијента трења клизања μ_S између рекета и лоптице. Нацртати и одговарајући график зависности ω_2 од μ_S . Користити бројне вредности за m , M , R , μ_R , e_P и a из претходних делова задатка. Уколико нисте урадили делове задатка под (в) и (г), можете користити $e_P = 0,40$ и $a = 3,0 \text{ mm}$. За које μ_S ће лоптица при судару променити смер спина, а да притом интензитет угаоне брзине буде максималан? **(4 поена)**

Задатак припремио: *др Ненад Вукмировић*, Институт за физику, Београд

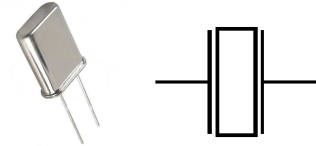
Рецензенти: *Вељко Јанковић*, Физички факултет; *др Дарко Танасковић*, Институт за физику, Београд

Председник Комисије за такмичења за средње школе: *др Александар Крмпот*, Институт за физику, Београд



Задатак 2: Пиезоелектрични осцилатор (10 поена)

Пиезоелектрични ефекат је појава стварања електричног напона на крајевима неких врста кристала услед механичког притиска. Ефекат је двосмеран, односно ако се на пиезоелектрични кристал доведе напон, доћи ће до његове механичке деформације. Постојање овог ефекта открили су браћа Жак и Пјер Кири 1880. године, а типични пиезоелектрици су кварц, топаз, Рошелова со, али и неки органски макромолекули (дентин, ДНК).

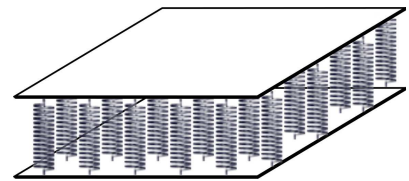


Слика 1: Кварцни осцилатор и његов електрични симбол

Данас су у широкој употреби пиезо-уређаји који претварају механичку енергију у електричну и обратно. Један од најважнијих уређаја овог типа је кварцни осцилатор (слика 1), који користи механичку резонанцу вибрирајућег пиезоелектричног кристала за стварање електричног сигнала веома прецизне фреквенције, што се користи код кварцних ручних сатова, дигиталних интегрисаних кола у рачунарима, мобилним телефонима, као и код радио-одашиљача и пријемника.

Део А: Прост модел механичко-електричног осцилатора (4 поена)

У овом делу задатка ћемо разматрати поједностављен модел пиезоелектричног осцилатора. Две металне плоче, свака површине S и масе m , постављене су паралелно једна изнад друге у пољу Земљине теже (слика 2). Кристал који се налази између плоча пиезоелектричног осцилатора, моделиран је помоћу n опруга направљених од изолатора. Константа еластичности сваке опруге је k . Доња плоча је учвршћена за хоризонталну подлогу, а равнотежно растојање између плоча је X_0 .



Слика 2: Једноставан модел пиезоелектричног осцилатора

- А.1. Плоче су затим прикључене на извор константног напона U и чине кондензатор. Електростатичка сила између плоча изазива помак горње плоче, па је равнотежно растојање између плоча сада X_1 . Изведите изразе за интензитет електричне привлачне силе F_q и напон U на плочама у зависности од X_0 , X_1 , S , k и n .
- А.2. Након тога, систем доводимо у стање хармонијског осциловања померањем горње плоче за мало растојање x у односу на равнотежан положај, при константном напону U . Изведите израз за убрзање горње плоче \ddot{x} у зависности од X_0 , X_1 , k , n , m и x , као и израз за угаону фреквенцију малих вертикалних осцилација горње плоче ω_0 у зависности од X_0 , X_1 , k , n и m .
- А.3. Додајмо у коло калем индуктивности L редно повезан са извором напона и кондензатором. У почетном тренутку кондензатор је напуњен и растојање између његових плоча је X_1 , а онда је његова горња плоча изведена из равнотежног положаја за мало растојање x . Овај систем са два степена слободе се описује помоћу помераја горње плоче x и промене количине наелектрисања q на кондензатору. Изведите изразе за \ddot{x} и \ddot{q} у зависности од X_1 , S , k , n , m , L , U , x и q .

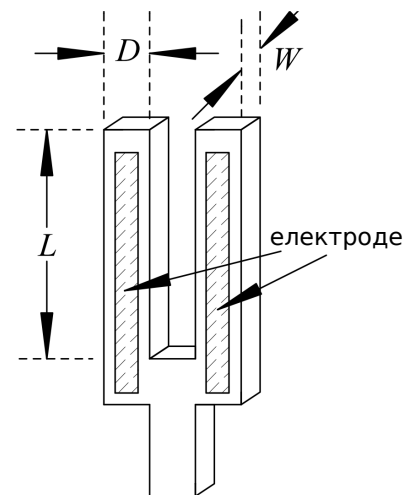


А.4. Пошто су осцилације система из претходног дела задатка хармонијске, може се претпоставити да важи $\ddot{x} = -\omega^2 x$ и $\ddot{q} = -\omega^2 q$. Изведите израз за угаону фреквенцију система ω у зависности од X_0 , X_1 , S , k , n , m и L . Коју релацију морају да задовољавају величине X_0 и X_1 да би систем хармонијски осциловао?

Део Б: Механички модел кварцне виљушке

(1,5 поена)

У овом делу задатка ћемо разматрати кварцну виљушку која представља пример реалног пиезоелектричног осцилатора. Кварцне виљушке се најчешће користе као фреквентни стандарди у сатовима, а механички се могу посматрати као хармонијски осцилатори у отпорној средини са малим коефицијентом пригушења $b = 7,83 \cdot 10^{-6} \text{ kg/s}$. Кварцна виљушка је облика звучне виљушке, али је много мања и ради на ултразвучним фреквенцијама (слика 3). Можемо је посматрати и као електрични уређај са два улаза, при чему се на сваком улазу налази танак филм који има улогу електроде и служи за повезивање са остатком електричног кола, односно механизма. Механичке осцилације виљушке стварају наелектрисање на електродама. Обратан ефекат се добија ако се на електроде прикључи напон који у зависности од поларитета привлачи или одбија делове кварцне виљушке на којима су електроде.



Слика 3: Кварцна виљушка

За мале амплитуде осциловања, кретања свих делова виљушке међусобно су пропорционална, тако да се тродимензионално кретање виљушке може редуковати на само једну координату. Овде ћемо изабрати координату x која описује положај једног врха виљушке дуж линије која спаја оба врха (при чему је положај другог врха $-x$). Тада је једначина осциловања кварцне виљушке:

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \Omega_0^2 x = f_0 \cos(\Omega t + \varphi).$$

Принудна сила постоји због прикљученог спољашњег наизменичног напона између електрода. Ефективна маса зупца кварцне виљушке је $m = 0,243 \rho_q V$, где је густина кварца $\rho_q = 2659 \text{ kg/m}^3$, а V је запремина једног зупца виљушке. Ефективни коефицијент еластичности је $k = \frac{EWD^3}{4L^3}$, где је Јангов моду еластичности кварца $E = 7,87 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$, а $W = 0,127 \text{ mm}$, $D = 0,325 \text{ mm}$ и $L = 2,809 \text{ mm}$ су димензије зупца виљушке.

Б.1. Написати једначину принудних пригушених осцилација кварцне виљушке у зависности од m , k , x , b и принудне силе облика $F = F_0 \cos(\Omega t + \varphi)$.

Б.2. Израчунати вредности коефицијената γ и Ω_0 .

Б.3. Принудне осцилације кварцне виљушке су описане изразом $x = x_0 \cos(\Omega t + \phi)$. Нађите изразе за амплитуду x_0 и разлику фаза принудних осцилација и принудне силе $\delta\varphi = \phi - \varphi$ у зависности од f_0 , γ , Ω и Ω_0 .



Део В: Електрични модел кварцне виљушке

(3 поена)

Наелектрисање на електродама q се јавља због пиезоелектричних особина кварца и пропорционално је померају врха зупца виљушке x , при чему је константа пропорционалности $\eta = 8,13 \cdot 10^{-6} \text{ C/m}$. Ова константа зависи од геометрије виљушке, начина резања кристала у односу на осе кристалографских равни кварца и облика и положаја електрода. Користећи везу наелектрисања q и помераја x , механички модел кварцне виљушке се може приказати еквивалентним електричним колом које се састоји од отпорника отпорности R_e , завојнице индуктивности L_e и кондензатора капацитета C_e .

В.1. Имајући у виду основну особину пиезоелектрика да претвара механичку снагу у електричну и обратно, нађите везу између амлитуде прикљученог напона и амплитуде принудне силе која делује на зупце виљушке.

В.2. Нађите једначину осциловања наелектрисања на електродама.

В.3. Нађите изразе за еквивалентни отпор R_e , индуктивност L_e и капацитет C_e у зависности од механичких карактеристика кварцне виљушке и константе η и израчунајте њихове вредности.

В.4. Пошто се механичке особине кварцне виљушке могу описати еквивалентним електричним колом, то се и читав модел кварцне виљушке може заменити еквивалентним електричним колом. Нацртајте ово електрично коло.

Део Г: Утицај температуре на кварцну виљушку

(1,5 поен)

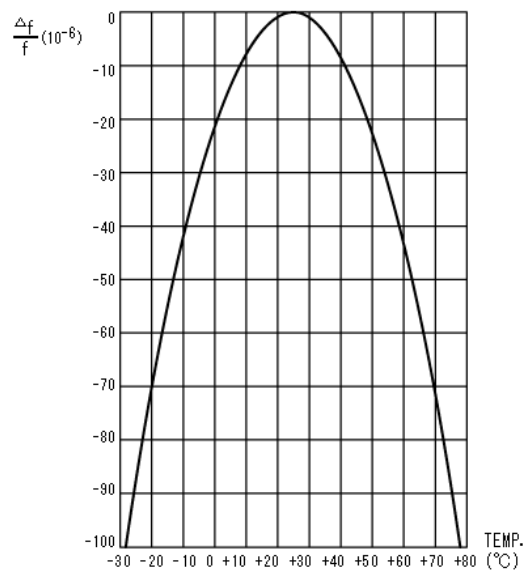
Експериментално је утврђено да се фреквенција кварцне виљушке мења са температуром и то по параболичном закону. На слици 4 је приказан график те зависности, а у експерименту је коришћена кристална кварцна виљушка фреквенције $f = 2^{15} \text{ Hz}$.

Г.1. На којој температури часовник са оваквом кварцном виљушком показује тачно време?

Г.2. Да ли ће овај часовник каснити или журити ако се користи при нижим или вишим температурама?

Г.3. Нађите емпиријску формулу зависности фреквенције кварцне виљушке од температуре.

Г.4. За колико ће се разликовати време које показују идентични кварцни часовници аутора овог задатка и рецензента после годину дана коришћења, ако је просечна температура просторије у којој ради аутор 25°C , а просечна температура просторије у којој ради рецензент 10°C ?



Слика 4: График зависности релативне промене фреквенције од температуре



7. СРПСКА ФИЗИЧКА ОЛИМПИЈАДА УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА
ШКОЛСКА 2012/2013. ГОДИНА



Друштво физичара Србије
Министарство просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије
ЗАДАЦИ

НОВИ САД
18-19.5.2013.

Задатак 3: Балон за разгледање (10 поена)

Ваздушни балон, отворен с доње стране, има константну запремину $V = 1,1\text{m}^3$. Материјал од кога је направљен занемарљиве је запремине а његова маса је $m_0 = 0,187\text{kg}$. Балон се налази у ваздуху температуре $t_1 = 20^\circ\text{C}$ и нормалног атмосферског притиска $p_0 = 1,013 \cdot 10^5\text{Pa}$. Густина ваздуха врло близу земље при овим условима је $\rho_1 = 1,2\text{kg/m}^3$.

а) До које температуре t_2 се мора загрејати ваздух у балону да би он лебдео? (2п)

б) У балону који је конопцем привезан за земљу загрева се ваздух до температуре $t_3 = 110^\circ\text{C}$. Израчунати силу затезања ужета којим је балон привезан за Земљу. Занемарити отпор ваздуха. (2п)

в) Претпоставимо да је отвор балона на дну затворен (густина ваздуха у балону је тада константна). Балон се подиже при константној температури ваздуха у њему $t_3 = 110^\circ\text{C}$ у изотермској атмосфери при температури 20°C и притиску на површини Земље $p_0 = 1,013 \cdot 10^5\text{Pa}$. До које висине h ће се подићи балон при овим условима? (2п)

г) Балон који се налази на висини h (питање в) помери се из свог равнотежног положаја за висину $\Delta h = 10\text{m}$ и затим поново ослободи. Показати да је кретање балона осцилаторно и наћи период осцилација. (4п)

Узети да је $g = 9,81\text{m/s}^2$.

* * * * *

ПОМОЋ

Барометарска формула је $\rho(x) = \rho_0 e^{-\frac{\rho_0 g x}{p_0}}$, где су ρ_0 и p_0 вредности густине и притиска за $x = 0$.

За функцију e^{-ax} , где је a константа и $ax \ll 1$ важи: $e^{-ax} \approx 1 - ax$.

Задатак припремио: *др Бојан Николић*, Институт за физику, Београд

Рецензент: *др Драган Д. Маркушев*, Институт за физику, Београд

Председник Комисије за такмичења ученика средњих школа ДФС: *др Александар Крмпот*,
Институт за физику, Београд