



*Експериментални задаци (20+10 поена):
Сензор количине воде и положаја корњаче у акваријуму*

1.1.

Посматрајмо најпре једну металну сферу. Ако је њено наелектрисање q , напон између површине сфере и бесконачности је једнак $V = q/(4\pi\epsilon_0 r)$. Интензитет електричног поља на површини сфере је $E = q/(4\pi\epsilon_0 r^2)$, а густина струје на површини сфере је једнака $j = \sigma E$. Одатле је укупна струја која истиче из једне електроде $I = 4\pi \cdot r^2 j$. Иста толика струја утиче у другу электроду, одакле се може закључити да је потенцијал друге електроде једнак $-V$. Проводност између електрода је онда једнака $G = I/(2V)$. Коришћењем свих претходних једначина добијамо да је $G = 2\pi\sigma$.

1.2.

Када је V велико, односно када тежи бесконачности, тада израз e^{-V/V_0} тежи нули, односно израз $1 - e^{-V/V_0}$ тежи 1. Дакле, за велике вредности запремине проводност тежи вредности G_0 .

1.3.

Измерене вредности су приказане у следећој табели:

Број чаша	1	2	3	4	5	6	7	8	9
V /[L]	0,400	0,80	1,20	1,60	2,00	2,40	2,80	3,20	3,60
ΔV /[L]	0,008 (0,008)	0,02 (0,016)	0,03 (0,024)	0,03 (0,032)	0,04 (0,040)	0,05 (0,048)	0,06 (0,056)	0,07 (0,064)	0,07 (0,072)
I /[mA]	0,70	1,33	1,74	2,05	2,29	2,45	2,61	2,74	2,83
ΔI /[mA]	0,02 (0,0135)	0,02 (0,0166)	0,02 (0,0187)	0,02 (0,0202)	0,03 (0,0215)	0,03 (0,0222)	0,03 (0,0231)	0,03 (0,0237)	0,03 (0,0242)
U /[V]	8,86	8,85	8,85	8,84	8,84	8,85	8,85	8,84	8,84
ΔU /[V]	0,04 (0,0321)	0,04 (0,0321)	0,04 (0,0321)	0,04 (0,0321)	0,04 (0,0321)	0,04 (0,0321)	0,04 (0,0321)	0,04 (0,0321)	0,04 (0,0321)
G /[mS]	0,079	0,150	0,197	0,232	0,259	0,277	0,295	0,310	0,320
ΔG /[mS]	0,002 (0,0018)	0,003 (0,0025)	0,003 (0,0028)	0,004 (0,0032)	0,004 (0,0033)	0,004 (0,0035)	0,004 (0,0037)	0,004 (0,0038)	0,004 (0,0039)

Број чаша	10	11	12	13	14	15	16	17
V /[L]	4,00	4,40	4,8	5,2	5,6	6,0	6,4	6,8
ΔV /[L]	0,08 (0,080)	0,09 (0,088)	0,1 (0,096)	0,1 (0,104)	0,1 (0,112)	0,1 (0,120)	0,2 (0,128)	0,2 (0,136)
I /[mA]	2,91	2,97	3,03	3,09	3,13	3,17	3,20	3,24
ΔI /[mA]	0,03 (0,246)	0,03 (0,0249)	0,03 (0,0252)	0,03 (0,0255)	0,03 (0,0257)	0,03 (0,0259)	0,03 (0,0260)	0,03 (0,0262)
U /[V]	8,84	8,84	8,84	8,84	8,84	8,84	8,83	8,83
ΔU /[V]	0,04 (0,0321)	0,04 (0,0321)	0,04 (0,0321)	0,04 (0,0321)	0,04 (0,0321)	0,04 (0,0321)	0,04 (0,0321)	0,04 (0,0321)
G /[mS]	0,329	0,336	0,343	0,350	0,354	0,359	0,362	0,367
ΔG /[mS]	0,004 (0,0040)	0,004 (0,0041)	0,004 (0,0041)	0,005 (0,0042)	0,005 (0,0042)	0,005 (0,0043)	0,005 (0,0043)	0,005 (0,0043)



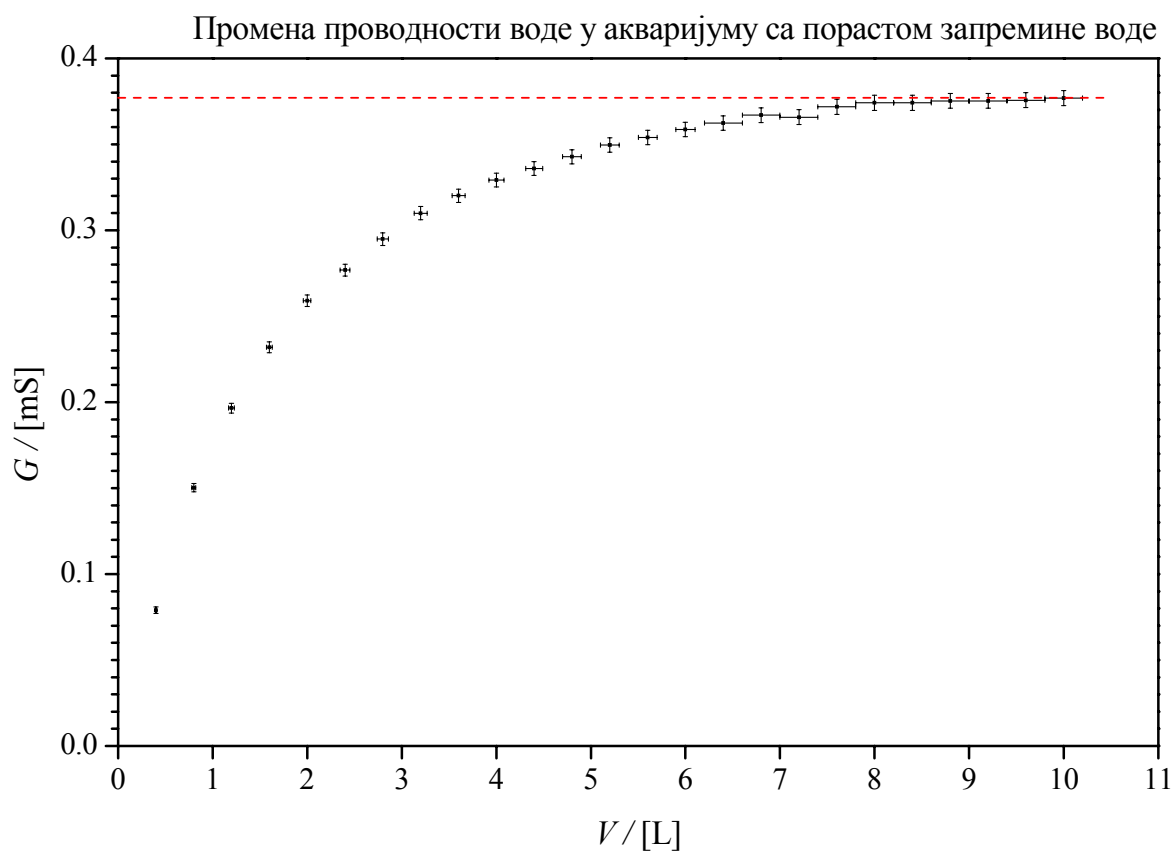
Број чаша	18	19	20	21	22	23	24	25
V / [L]	7,2	7,6	8,0	8,4	8,8	9,2	9,6	10,0
ΔV / [L]	0,2 (0,144)	0,2 (0,152)	0,2 (0,160)	0,2 (0,168)	0,2 (0,176)	0,2 (0,184)	0,2 (0,192)	0,2 (0,200)
I / [mA]	3,23	3,28	3,30	3,30	3,31	3,31	3,31	3,32
ΔI / [mA]	0,03 (0,0262)	0,03 (0,0264)	0,03 (0,0265)	0,03 (0,0265)	0,03 (0,0266)	0,03 (0,0266)	0,03 (0,0266)	0,03 (0,0266)
U / [V]	8,83	8,82	8,82	8,82	8,82	8,82	8,81	8,81
ΔU / [V]	0,04 (0,0321)	0,04 (0,0320)	0,04 (0,0320)	0,04 (0,0320)	0,04 (0,0320)	0,04 (0,0320)	0,04 (0,0320)	0,04 (0,0320)
G / [mS]	0,366	0,372	0,374	0,374	0,375	0,375	0,376	0,377
ΔG / [mS]	0,005 (0,0044)	0,005 (0,0044)	0,005 (0,0044)	0,005 (0,0044)	0,005 (0,0044)	0,005 (0,0044)	0,005 (0,0044)	0,005 (0,0044)

Грешке напона и струје су одређене према упутству датом у задатку. Грешка проводности је

$$\Delta G = G \left(\frac{\Delta I}{I} + \frac{\Delta U}{U} \right).$$

Грешка за запремину је процењена на основу грешке која се прави при одређивању нивоа воде. Процењено је да је грешка у нивоу воде око 2 mm. Пошто је висина до ознаке до које се пуни око 11 cm, процењено је да је релативна грешка одређивања запремине око 2%. Ово је грешка како за једну чашу, тако и за већи број чаша јер се при додавању воде сабирају апсолутне грешке, а релативна грешка остаје иста.

1.4.





1.5.

Параметар G_0 можемо да одредимо са графика као вредност којој тежи проводност када запремина течности тежи бесконачно великој вредности. У нашем случају проводност је практично престала да расте за неколико последњих тачака. Зато параметар G_0 може да се одреди на основу ових тачака. Конкретно, на графику је за G_0 узета вредност проводности за последњу тачку. Хоризонтална асимптота $G = G_0$ је на графику представљена испрекиданом линијом. За грешку параметра можемо да узмемо грешку неколико последњих тачака (0,005mS). Тако добијамо

$$G_0 = (0,377 \pm 0,005)\text{mS}.$$

1.6.

Из једначине (2) следи

$$1 - \frac{G}{G_0} = e^{-V/V_0}.$$

Логаритмовањем ове зависности добијамо

$$-\ln\left(1 - \frac{G}{G_0}\right) = \frac{1}{V_0}V.$$

Одавде следи да зависност $-\ln(1 - G/G_0)$ од V има облик $y = k \cdot x$, дакле график ове зависности је права која пролази кроз координатни почетак са коефицијентом правца $k = 1/V_0$.

1.7.

$V/[L]$	0,400	0,80	1,20	1,60	2,00	2,40	2,80	3,20	3,60
$\Delta V/[L]$	0,008 (0,008)	0,02 (0,016)	0,03 (0,024)	0,03 (0,032)	0,04 (0,040)	0,05 (0,048)	0,06 (0,056)	0,07 (0,064)	0,07 (0,072)
$-\ln(1 - G/G_0)$	0,24 (0,235)	0,51 (0,509)	0,74 (0,737)	0,96 (0,955)	1,16 (1,162)	1,3 (1,325)	1,5 (1,524)	1,7 (1,727)	1,9 (1,892)
$\Delta(-\ln(1 - G/G_0))$	0,01 (0,009)	0,02 (0,018)	0,04 (0,038)	0,04 (0,040)	0,06 (0,055)	0,1 (0,068)	0,1 (0,088)	0,1 (0,112)	0,2 (0,136)

$V/[L]$	4,00	4,40	4,8	5,2	5,6	6,0	6,4	6,8
$\Delta V/[L]$	0,08 (0,080)	0,09 (0,088)	0,1 (0,096)	0,1 (0,104)	0,1 (0,112)	0,1 (0,120)	0,2 (0,128)	0,2 (0,136)
$-\ln(1 - G/G_0)$	2,1 (2,065)	2,2 (2,219)	2,4 (2,406)	2,6 (2,636)	2,8 (2,797)	3,0 (3,042)	3,2 (3,224)	3,6 (3,630)
$\Delta(-\ln(1 - G/G_0))$	0,2 (0,165)	0,2 (0,196)	0,3 (0,241)	0,3 (0,308)	0,4 (0,366)	0,5 (0,473)	0,6 (0,57)	0,9 (0,87)

$V/[L]$	7,2	7,6	8,0	8,4	8,8	9,2	9,6	10,0
$\Delta V/[L]$	0,2 (0,144)	0,2 (0,152)	0,2 (0,160)	0,2 (0,168)	0,2 (0,176)	0,2 (0,184)	0,2 (0,192)	0,2 (0,200)
$-\ln(1 - G/G_0)$	3,5 (3,534)	4 (4,323)	5 (4,834)	5 (4,834)	5 (5,239)	5 (5,239)	/ (5,932)	/
$\Delta(-\ln(1 - G/G_0))$	0,8 (0,785)	2 (1,76)	3 (2,945)	3 (2,945)	5 (4,425)	5 (4,425)	/ (8,865)	/

Грешка за величину $-\ln(1 - G/G_0)$ одређује се као

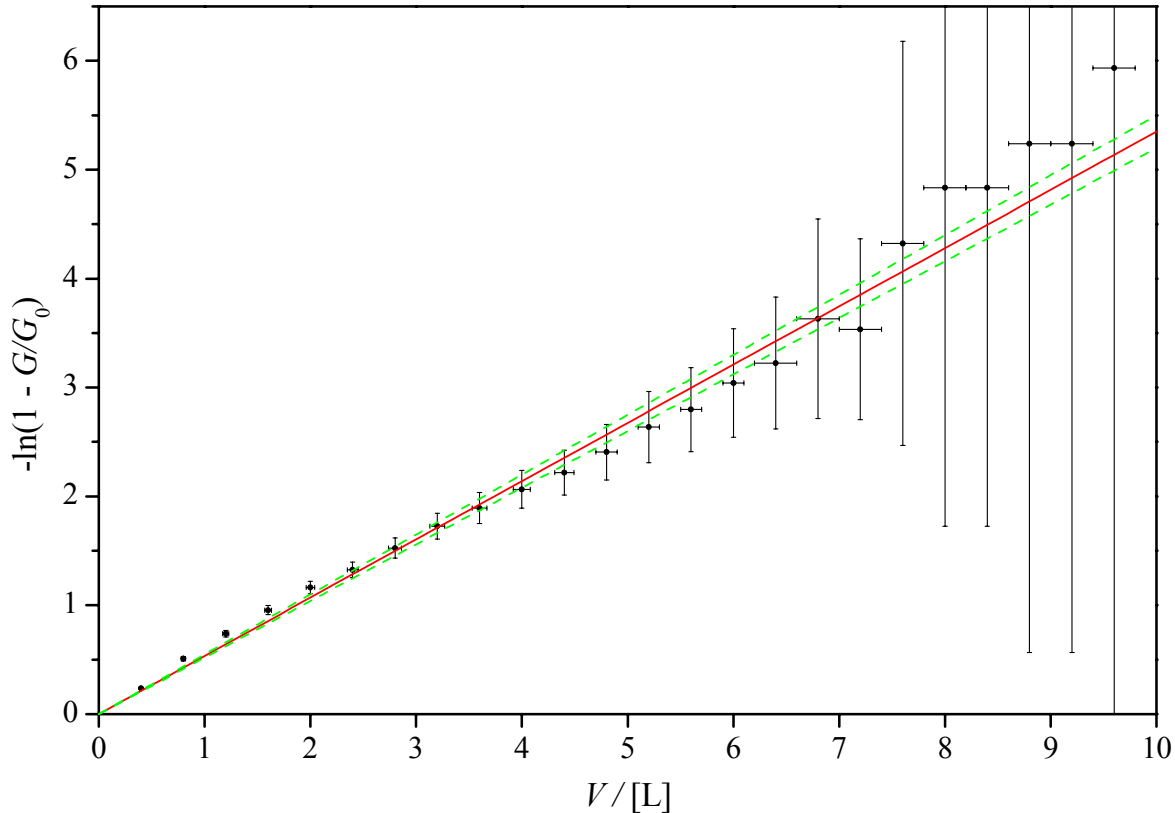
$$\Delta(-\ln(1 - G/G_0)) = \left| \frac{\partial}{\partial G}(-\ln(1 - G/G_0)) \right| \cdot \Delta G + \left| \frac{\partial}{\partial G_0}(-\ln(1 - G/G_0)) \right| \cdot \Delta G_0$$



одакле добијамо

$$\Delta(-\ln(1 - G/G_0)) = \left| \frac{1}{(1 - G/G_0)G_0} \right| \cdot \Delta G + \left| \frac{G}{(1 - G/G_0)G_0^2} \right| \cdot \Delta G_0$$

Линеаризована зависност проводности од запремине воде



Кроз ове тачке провлачимо праву која пролази кроз координатни почетак. При томе не узимамо последње тачке са графика јер су грешке за њих веће или једнаке самој вредности ординате. Ово је последица чињенице да је за ове тачке $G \approx G_0$, односно $G/G_0 \approx 1$. Због овога је разлика $1 - G/G_0 \ll 1$, па је зато њена релативна грешка велика.

Да бисмо одредили нагиб ове праве довољно је да прочитамо апсцису и ординату било које тачке са ове праве. Из нагиба ове праве добијамо да је $V_0 = 1,869L$. Грешку можемо да добијемо тако што ћемо кроз ове тачке провући две најекстремније праве за које процењујемо да их има смисла провући кроз дате експерименталне тачке и њихове грешке. На овај начин добијамо да је грешка $0,05L$. Тако је

$$V_0 = (1,87 \pm 0,05)L.$$

1.8.

Из једначине (3) је

$$\sigma = \frac{6G_0 S_0}{\pi V_0} = 0,04751 \frac{S}{m}.$$

Грешка одређивања специфичне проводности је



$$\Delta\sigma = \sigma \left(\frac{\Delta G_0}{G_0} + \frac{\Delta V_0}{V_0} + \frac{\Delta S_0}{S_0} \right) = 0,00460 \frac{\text{S}}{\text{m}} \approx 0,005 \frac{\text{S}}{\text{m}}$$

одакле је

$$\sigma = (48 \pm 5) \text{mS/m.}$$

1.9.

Из једначине (2) следи

$$S = \frac{dG}{dV} = \frac{G_0}{V_0} e^{-\frac{V}{V_0}}$$

Одатле следи да је највећа осетљивост кад је $V = 0$ и она износи $S_{\max} = \frac{G_0}{V_0} = 0,21 \frac{\text{mS}}{\text{L}}$. Најмања осетљивост је једнака нули и добија се кад запремина тежи бесконачности.

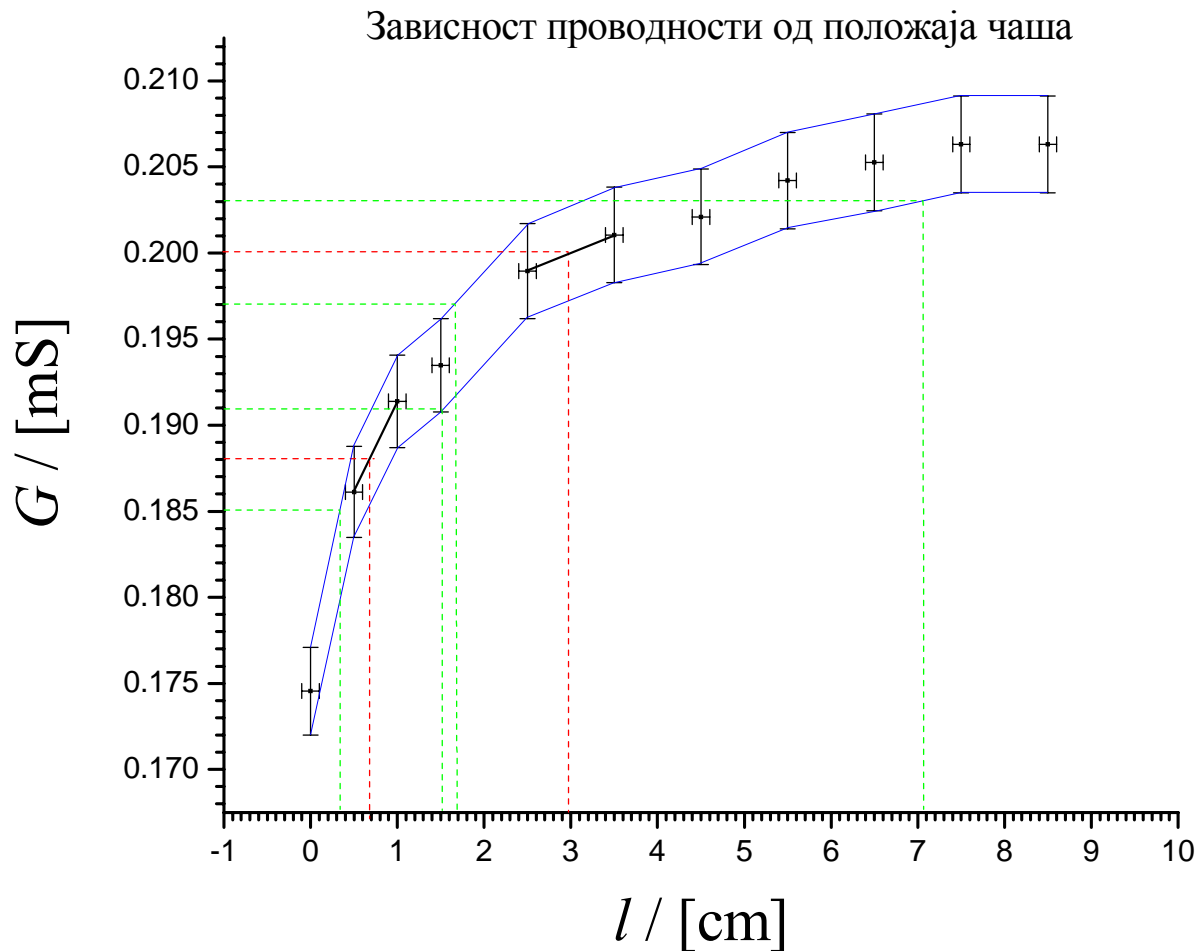
2.1.

l / [cm]	0,0	0,5	1,0	1,5	2,5	3,5
Δl / [cm]	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1
I / [mA]	1,66	1,77	1,82	1,84	1,89	1,91
ΔI / [mA]	0,02 (0,0183)	0,02 (0,0189)	0,02 (0,0191)	0,02 (0,0192)	0,02 (0,0194)	0,02 (0,0195)
U / [V]	9,51	9,51	9,51	9,51	9,50	9,50
ΔU / [V]	0,04 (0,03375)	0,04 (0,03375)	0,04 (0,03375)	0,04 (0,03375)	0,04 (0,03375)	0,04 (0,03375)
G / [mS]	0,175	0,186	0,191	0,193	0,199	0,201
ΔG / [mS]	0,003 (0,0025)	0,003 (0,0026)	0,003 (0,0027)	0,003 (0,0027)	0,003 (0,0028)	0,003 (0,0028)

l / [cm]	4,5	5,5	6,5	7,5	8,5
Δl / [cm]	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1
I / [mA]	1,92	1,94	1,95	1,96	1,96
ΔI / [mA]	0,02 (0,0196)	0,02 (0,0197)	0,02 (0,0198)	0,02 (0,0198)	0,02 (0,0198)
U / [V]	9,50	9,50	9,50	9,50	9,50
ΔU / [V]	0,04 (0,03375)	0,04 (0,03375)	0,04 (0,03375)	0,04 (0,03375)	0,04 (0,03375)
G / [mS]	0,202	0,204	0,205	0,206	0,206
ΔG / [mS]	0,003 (0,0028)	0,003 (0,0028)	0,003 (0,0028)	0,003 (0,0028)	0,003 (0,0028)

Грешке струје, напона и проводности се рачунају као и раније. За грешку мерења растојања од електроде може да се узме вредност јединичног подеока на леђиру, односно 1mm.

2.2.



2.3.

У зависности где је члан комисије ставио чашу могу да се добију различити резултати. Ево једног примера шта може да се добије. За напон је измерена вредност $9,51\text{V}$, а за струју вредност $1,79\text{mA}$. Одавде добијамо да је проводност $(0,188 \pm 0,003)\text{mS}$. Са графика можемо да прочитамо да ова проводност одговара растојању од електрода од $0,7\text{cm}$ (праве за читавање су дате црвеним тачкастим линијама на графику). Процену грешке ове вредности такође је могуће направити са графика, тако што се читају вредности положаја за вредности проводности са почетка и краја интервала грешке (у овом случају за $0,185\text{mS}$ и $0,191\text{mS}$). Праве за то читавање дате су зеленим испрекиданим линијама. Након читавања се добија да је положај чаше у интервалу од $0,3\text{cm}$ до $1,5\text{cm}$. Одатле коначно следи да је положај чаше дат са $(0,9 \pm 0,6)\text{cm}$.

2.4.

Није увек могуће одредити положај чаше са грешком мањом од 1cm . Нпр, ако би била измерена проводност од $(0,200 \pm 0,003)\text{mS}$ истим поступком као у делу 2.3. (који је приказан на слици) би се добило да је положај чаше $3,0\text{cm}$, а истим поступком за анализу грешке би се добило да је положај чаше негде у интервалу од $1,7\text{cm}$ до $7,1\text{cm}$, па је грешка свакако већа од 1cm .