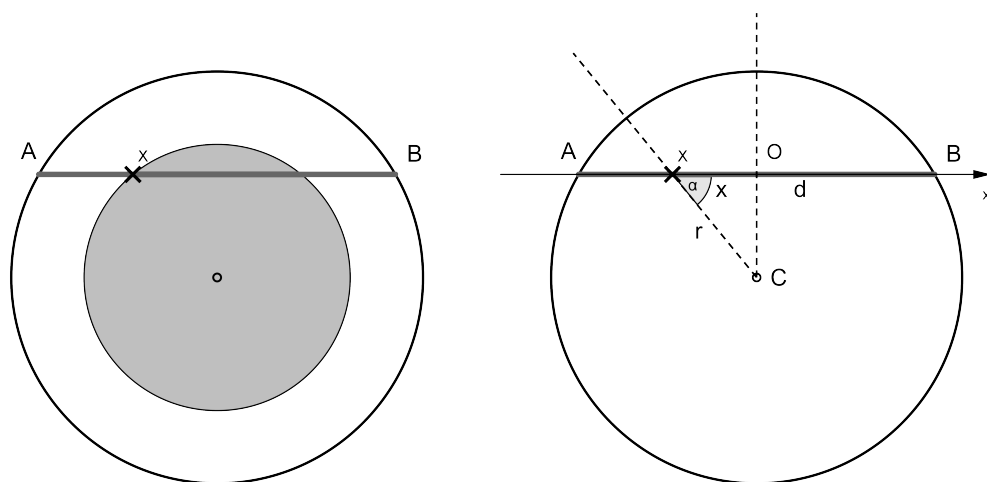


# Rešenje problema meseca za Februar 2012.

Pre nego što počnemo, podsetimo se Njutnovih zakona gravitacije. Neka se neko telo nalazi u tački  $X$  u unutrašnjosti Zemlje (kao na slici 1(a)) i neka je tačka  $X$  na rastojanju  $r$  od centra Zemlje. Tada na to telo deluje samo lopta poluprečnika  $r$  (osenčen deo Zemlje na slici 1(a)) i to tako da je dejstvo isto kao kada bi sva ta masa bila smeštena u tački  $C$ . Preostali deo Zemlje (neosenčen deo na slici 1(a)) ne deluje zato što se tačka  $X$  nalazi unutar njega.



(a) dejstvo Zemlje na kamen

(b) postavka problema

Slika 1:

Postavimo pravac  $x$  tako da prolazi kroz cev  $AB$  i da je koordinatni početak tačka  $T$  (slika 1(b)). Primitimo da će kretanje kamena duž cevi biti oscilatorno, a da je traženo vreme  $\tau$  jednako polovini perioda  $T$  oscilovanja kamena oko tačke  $O$ . Neka je tačka  $X$  jedna od tačaka kroz koju kamen mase  $m$  prolazi tokom kretanja kroz cev  $AB$ . Označimo rastojanje tačke  $X$  od centra Zemlje sa  $r$ , a sa  $x$  njenu koordinatu duž pravca  $x$  (kao na slici 1(b)).

Sila kojom Zemlja privlači kamen u tački  $X$  jednaka je:

$$F = \gamma \frac{m\rho V(r)}{r^2} = \gamma \rho m \frac{\frac{4}{3}r^3\pi}{r^2} = \frac{4}{3}\gamma\rho\pi m r. \quad (1)$$

Kako je nama potrebna samo komponenta duž pravca  $x$  to je jednačina kretanja kamena duž cevi:

$$ma = F \cos \alpha = \frac{4}{3}\gamma\rho\pi m r \cos \alpha,$$

pri čemu je  $r = \frac{x}{\cos \alpha}$ , pa konačno imamo:

$$ma = \frac{4}{3}\gamma\rho\pi m x. \quad (2)$$

Iz (2) korišćenjem uputstva datog u zadatku imamo (znak minus ima čisto fizički karakter i mogli smo ga napisati u jednačini (1)):

$$C = \frac{4}{3}\gamma\rho\pi m \text{ i } \tau = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega} = \pi\sqrt{\frac{m}{C}},$$

što nakon sređivanja daje:

$$\tau = \pi\sqrt{\frac{3}{4\gamma\rho\pi}}.$$

Primitimo da dužina cevi  $d$  ne figuriše u poslednjoj jednačini. Dakle, vreme za koje bi kamen prešao rastojanje između tačaka  $A$  i  $B$  je konstantno za bilo koje dve tačke  $A$  i  $B$  na površini Zemlje! Uvrštavanjem približne vrednosti gustine Zemlje (pod pretpostavkom da je ona homogena, pa možemo smatrati da je  $\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}R^3\pi}$ , gde je  $M$  masa Zemlje, a  $R$  njen usrednjen poluprečnik) dobijamo da je  $\tau \approx 2530s \approx 42.15$  minuta.